Módulo 2 - Diapositiva 10

Operaciones entre Funciones

Universidad de Antioquia

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Temas: Operaciones con funciones

- Suma y diferencia de funciones
- Producto de funciones
- Cociente de funciones
- Compuesta de funciones

Operaciones con funciones

Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ y sean f y g dos funciones

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{y} \quad g : B \longrightarrow \mathbb{R}$$

Suma y diferencia de funciones

$$f \pm g : A \cap B \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

con $x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = A \cap B$, es decir,

$$\text{Dom}(f \pm g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$$

Ejemplo 1

Sean f y g funciones realvaluadas definidas por:

$$f(x) = x^2 + 1 \quad \text{y} \quad g(x) = x^2 - 2x + 3.$$

Entonces

$$(f + g)(x) = 2x^2 - 2x + 4$$

$$(f - g)(x) = 2x - 2$$

$$(g - f)(x) = -2x + 2$$

Todas con dominio $\mathbb{R}$

Producto de funciones

$$f \cdot g : A \cap B \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

con

$$x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = A \cap B$$

es decir

$$\text{Dom}(f \cdot g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$$

Ejemplo 2

Sean f y g funciones realvaluadas definidas por

$$f(x) = \sqrt{x+1} \quad \text{y} \quad g(x) = \sqrt{x-1}$$

con $Dom(f) = [-1, \infty)$ y $Dom(g) = [1, \infty)$. Entonces

$$(f \cdot g)(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

con

$$Dom(f \cdot g) = [1, \infty)$$

Cociente de funciones

$$\frac{f}{g} : C \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

con

$$C = \{x \in A \cap B \mid g(x) \neq 0\}$$

es decir

$$\text{Dom} \left(\frac{f}{g}\right) = C$$

Ejemplo 3

Sean f y g funciones realvaluadas definidas por:

$$f(x) = x^2 - 1 \quad \text{y} \quad g(x) = x + 1$$

con $Dom(f) = Dom(g) = \mathbb{R}$.

Entonces

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x - 1, \quad \text{con} \quad Dom\left(\frac{f}{g}\right) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{1}{x - 1}, \quad \text{con} \quad Dom\left(\frac{g}{f}\right) = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$$

Compuesta de funciones

$$f \circ g : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

con

$$D = \{x \in \text{Dom}(g) \mid g(x) \in \text{Dom}(f)\}$$

es decir,

$$\text{Dom}(f \circ g) = D$$

Es claro que, en general,

$$f \circ g \neq g \circ f$$

Ejemplo 4

Sean f y g funciones realvaluadas definidas por:

$$f(x) = x^2 + 1 \quad \text{y} \quad g(x) = \sqrt{x}, \quad \text{con}$$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \text{Dom}(g) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}.$$

Entonces

$$(f(g(x))) = x + 1, \quad \text{con} \quad \text{Dom}(f \circ g) = [0, \infty)$$

$$g(f(x)) = \sqrt{x^2 + 1}, \quad \text{con} \quad \text{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R}$$

$$f \circ g \neq g \circ f$$

Referencias

Sullivan, M. *Álgebra y Trigonometría*, 7^a Edición. Editorial Pearson Prentice Hall, 2006.

Swokowski, E.W. Cole, J.A. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica* 13^a Edición. Editorial Cengage Learning, 2011

Zill, D. G. Dewar, J. M. *Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica*, 3^a Edición. Editorial McGraw-Hill, 2012.