Módulo 2 - Diapositiva 12
Funciones Biyectivas

Universidad de Antioquia

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Temas

- Funciones Inyectivas
- Funciones Sobreyectivas
- Funciones Biyectivas

Función Inyectiva

Definición

Sea $f: \ X \longrightarrow Y$ una función. f es inyectiva (o uno a uno) si para cualquier par de elementos $x_1, x_2 \in X$:

$$\text{Si} \quad x_1 \neq x_2, \ \text{entonces } f(x_1) \neq f(x_2),$$

o equivalentemente,

$$\text{Si} \quad f(x_1) = f(x_2), \ \text{entonces } x_1 = x_2.$$

Una función es inyectiva, si y sólo si, ninguna linea horizontal intersecta su gráfica más de una vez.

Ejemplo

1. La función $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $x \longmapsto x^2$ no es inyectiva, ya que $h(1) = 1 = h(-1)$ pero $1 \neq -1$.
2. La función $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $x \longmapsto x^2$ es inyectiva.
   En efecto, sean $x_1, x_2 \in Dom(g) = \mathbb{R}^+$ tales que $g(x_1) = g(x_2)$, veamos que $x_1 = x_2$.
   Como $g(x_1) = g(x_2)$, entonces $x_1^2 = x_2^2$, por tanto
   $$|x_1| = \sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2} = |x_2|$$
   y dado que $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$, se sigue que $x_1 = x_2$.
3. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $x \longmapsto x^3$ es inyectiva.

Ejercicio

Determine cuales de las siguientes funciones son inyectivas:

$$f + h, \quad h + g, \quad g - h$$

Función Sobreyectiva

Definición

Sea $f: X \longrightarrow Y$ una función. f es sobreyectiva (sobre) si:

$$\text{para todo } y \in Y \text{ existe un } x \in X \text{ tal que } y = f(x)$$

Una función es sobreyectiva si su imagen o rango es igual a su codominio, es decir que

$$f \text{ es sobreyectiva, si y solo si, } \operatorname{ran}(f) = Y.$$

Ejemplo

1. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $x \longmapsto x - 1$ es sobreyectiva, ya que $Ran(f) = \mathbb{R} = Codom(f)$.
2. La función $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $x \longmapsto x^2$ no es sobreyectiva, porque $Ran(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \neq \mathbb{R} = Codom(f)$.
3. La función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida por $x \longmapsto x^2$ es sobreyectiva, porque $Ran(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} = Codom(f)$.

Ejemplo

La función $f(x) = \sqrt{x+1}$ tiene como rango el conjunto $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, por tanto para que la función f sea sobreyectiva su codominio debe ser el conjunto $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Función Biyectiva

Definición

Sea $f: X \longrightarrow Y$ una función. f es biyectiva (biunívoca), si y solo si, es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Es claro que para hablar de inyectividad debe conocerse el dominio de la función y que para hablar de sobreyectividad es necesario conocer el codominio y el rango de la función.

Por tanto para verificar si una función es o no biyectiva es necesario encontrar dominio e imagen cuando estos no estén especificado. Siempre que el codominio no esté especificado se asumirá que es $\mathbb{R}$.

Ejemplo

Dadas las funciones:

$$\begin{aligned} j : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} h : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}^+. \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

Se observa que :

- La función j no es biyectiva, pues no es inyectiva ni es sobreyectiva.
- La función h no es biyectiva, pues aunque es sobreyectiva no es inyectiva.
- La función g no es biyectiva, pues aunque es inyectiva no es sobreyectiva.
- La función f es biyectiva, pues es inyectiva y sobreyectiva.

Ejercicios

Ejercicio 1

Para las siguientes funciones, determine si ellas son o no biyectivas.

1. $f(x) = x^2 - 4$
2. $f(x) = x^3 - 2$

En caso de no serlo, redefina su dominio y codominio para que ellas lo sean.

Ejercicio 2

Demuestre que la siguiente función es inyectiva en su dominio.

$$f(x) = \frac{3x+5}{1-2x}$$

Referencias

Sullivan, M. *Álgebra y Trigonometría*, 7^a Edición. Editorial Pearson Prentice Hall, 2006.

Swokowski, E.W. Cole, J.A. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica* 13^a Edición. Editorial Cengage Learning, 2011

Zill, D. G. Dewar, J. M. *Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica*, 3^a Edición. Editorial McGraw-Hill, 2012.