Módulo 2 - Diapositiva 13
Inversa de una Función

Universidad de Antioquia

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Temas

- Funciones Invertibles
- Funciones Invertibles y composición

Funciones Invertibles

Definición

Sea

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow Y, \\ x &\longmapsto y \end{aligned}$$

una funcií biyectiva. La función inversa de f, denotada por f^{-1}, es la función:

$$\begin{aligned} f^{-1} : Y &\longrightarrow X, \\ y &\longmapsto x \end{aligned}$$

Es decir que f^{-1} es la función inversa de f, si y solo si,

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

Observación

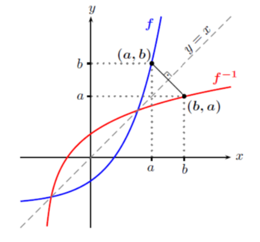
$$dom(f^{-1}) = ran(f) \quad \text{y} \quad ran(f^{-1}) = dom(f)$$

Relación entre las gráficas de f y f^{-1}.

Sea f una función biyectiva. El punto (a,b) está sobre la gráfica de f, si y solo si, el punto (b,a) está sobre la gráfica de f^{-1}.

Gráfica de f^{-1}

La gráfica de f^{-1} se obtiene reflejando la gráfica de f respecto a la línea $y=x$.



Como hallar la inversa de una función

Directrices para hallar f^{-1}

- Verifique que f sea una función biyectiva en todo su dominio.

- De la ecuación $y = f(x)$ despeje x en terminos de y, obteniendo una ecuación de la forma
$$x = f^{-1}(y).$$

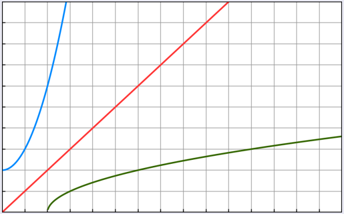
- Para expresar f^{-1} como una función de x, intercambie x y y. La ecuación resultante es
$$y = f^{-1}(x).$$

Como hallar la inversa de una función

Ejemplo

Sea $f : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \longrightarrow [2, \infty)$ definida por $x \longmapsto x^2 + 2$

1. Notemos que $Dom(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ y que $Codom(f) = [2, \infty)$.
   Es fácil verificar que f es inyectiva, además si hacemos $y = x^2 + 2$, entonces $x = \sqrt{y-2}$ y por tanto $y - 2 \geq 0$, es decir que $ran(f) = [2, \infty)$. Así f es biyectiva y por tanto existe f^{-1}.
2. De lo anterior tenemos que $x = \sqrt{y-2}$ y al intercambiar x por y es esta igualdad obtenemos que $y = f^{-1}(x) = \sqrt{x-2}$, con $Dom(f^{-1}) = ran(f) = [2, \infty)$ y $ran(f^{-1}) = Dom(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.
3. Así al graficar las funciones f, f^{-1} y la recta $y = x$ obtenemos



Teorema de funciones inversas

Teorema

Sea $f: X \longrightarrow Y$ una función biyectiva. Una función $g: Y \longrightarrow X$ es la inversa de f, si y solo si, se cumplen las dos siguientes condiciones:

1. $g(f(x)) = x$ para todo $x \in X$.
2. $f(g(y)) = y$ para todo $y \in Y$.

Corolario

Sea $f: X \longrightarrow Y$ una función biyectiva. La función $f^{-1}: Y \longrightarrow X$ satisface:

1. $f^{-1}(f(x)) = x$ para todo $x \in X$.
2. $f(f^{-1}(y)) = y$ para todo $y \in Y$.

Teorema

Si $f: X \longrightarrow Y$ y $g: Y \longrightarrow Z$ tienen inversas, entonces la función compuesta $g \circ f: X \longrightarrow Z$ también tiene inversa y está dada por

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Composición de funciones e inversas

Ejemplo

1. Sean $f(x) = x^3 - \pi$ y $g(x) = \sqrt[3]{x+\pi}$. Entonces

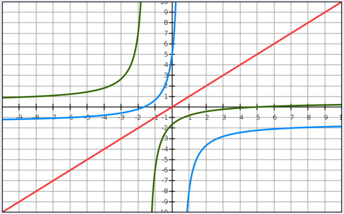
$$f(g(x)) = f(\sqrt[3]{x+\pi}) = (\sqrt[3]{x+\pi})^3 - \pi = x + \pi - \pi = x$$

y

$$g(f(x)) = g(x^3 - \pi) = (\sqrt[3]{x^3 - \pi + \pi}) = \sqrt{x^3} = x$$

Por tanto f y g son inversas una de la otra.

2. Al graficar las funciones $f(x) = \dfrac{3x+5}{1-2x}$ (en azul), $g(x) = \dfrac{x-5}{2x+3}$ (en verde) y la recta $x = y$ (en rojo) obtenemos:



Referencias

Sullivan, M. *Álgebra y Trigonometría*, 7^a Edición. Editorial Pearson Prentice Hall, 2006.

Swokowski, E.W. Cole, J.A. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica* 13^a Edición. Editorial Cengage Learning, 2011

Zill, D. G. Dewar, J. M. *Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica*, 3^a Edición. Editorial McGraw-Hill, 2012.