

Módulo 2 - Diapositiva 14

Transformaciones de las representaciones gráficas de funciones

Universidad de Antioquia

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Temas

- Funciones pares y funciones impares
- Transformaciones de Gráficas

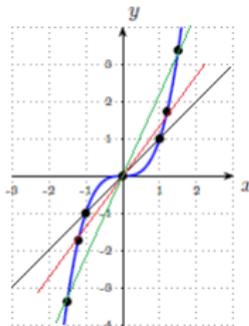
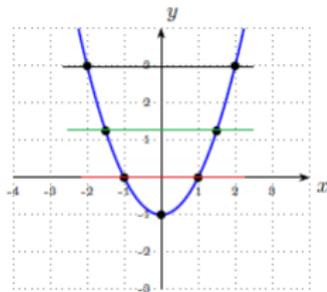
Función Par y Función Impar

Función par

Una función f se denomina par si $f(-x) = f(x)$ para todo x en el dominio de f . La gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje y .

Función impar

Una función f se denomina impar si $f(-x) = -f(x)$ para todo x en el dominio de f . La gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen.



Ejemplos

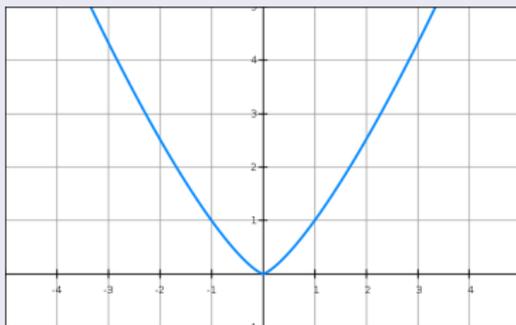
Note que en la definición de función par e impar es necesario que x y $-x$ pertenezcan al dominio de la función para que tenga sentido comparar $f(x)$ y $f(-x)$.

Ejemplo 1

$f(x) = x\sqrt[3]{x}$ es una función par, porque

$$f(-x) = (-x)\sqrt[3]{(-x)} = (-x)(-\sqrt[3]{x}) = x\sqrt[3]{x} = f(x).$$

Notemos que su gráfica es simétrica respecto al eje y .



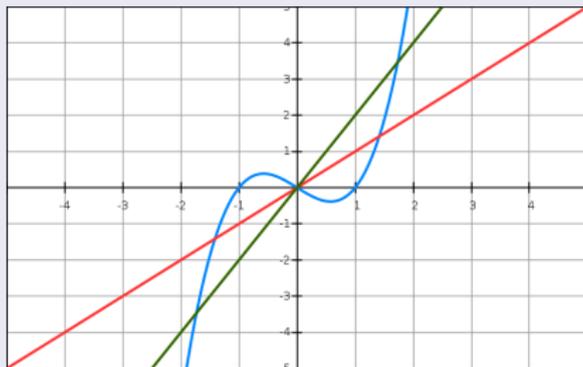
La función $h(x) = x\sqrt{x}$ tiene dominio $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, por tanto para $x \in \text{Dom}(h)$ con $x \neq 0$, $-x \notin \text{Dom}(h)$ y no tiene sentido comparar $f(x)$ con $f(-x)$.

Ejemplo 2

$g(x) = x^3 - x$ es una función impar, porque

$$g(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -g(x).$$

Notemos que su gráfica (en azul) es simétrica con respecto al origen.



Ejemplo 3

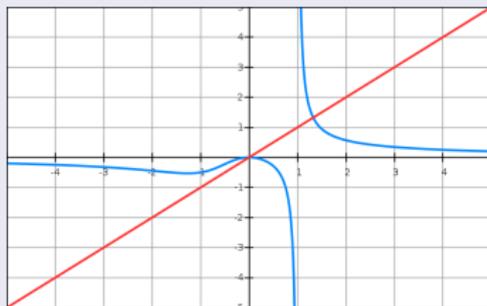
La función $t(x) = \frac{x^2}{x^3 - 1}$ no es una función par ni impar, ya que

$$t(-x) = -\frac{x^2}{x^3 + 1} \quad \text{y} \quad -t(x) = -\frac{x^2}{x^3 - 1},$$

así tenemos que

$$t(-x) \neq t(x) \quad \text{y} \quad t(-x) \neq -t(x).$$

Además su gráfica (en azul) no es simétrica, ni respecto al eje y ni respecto al origen.

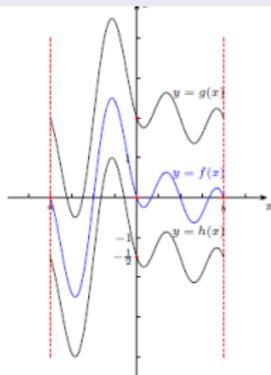


Transformaciones de Gráficas

Desplazamientos verticales

Suponga que $c > 0$. Para obtener la gráfica de

- 1 $y = f(x) + c$ se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ una distancia de c unidades hacia arriba.
- 2 $y = f(x) - c$ se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ una distancia de c unidades hacia abajo.



- $y = f(x)$

$$a \leq x \leq b$$

- $y = g(x) = f(x) + 2$

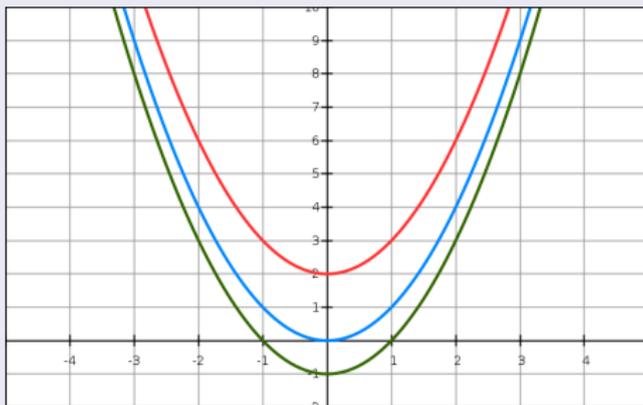
$$a \leq x \leq b$$

- $y = h(x) = f(x) - \frac{1}{2}$

$$a \leq x \leq b$$

Ejemplo de desplazamiento vertical

Si $f(x) = x^2$, $h(x) = x^2 + 2$ y $g(x) = x^2 - 1$, entonces para obtener la gráfica de la función h (en rojo) desplazamos la gráfica de la función f (en azul) dos unidades hacia arriba, así $h(x) = f(x) + 2$. Para obtener la gráfica de la función g (en verde) desplazamos la gráfica de la función f (en azul) una unidad hacia abajo, así $g(x) = f(x) - 1$.

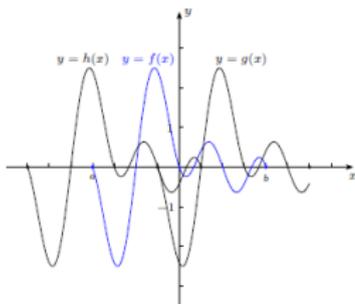


Transformaciones de Gráficas

Desplazamientos horizontales

Suponga que $c > 0$. Para obtener la gráfica de

- 1 $y = f(x + c)$ se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ una distancia de c unidades hacia la izquierda.
- 2 $y = f(x - c)$ se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ una distancia de c unidades hacia la derecha.



■ $y = f(x)$

$$a \leq x \leq b$$

■ $y = g(x) = f\left(x - \frac{a}{2}\right)$

$$a \leq x - \frac{a}{2} \leq b$$

$$a + \frac{a}{2} \leq x \leq b + \frac{a}{2}$$

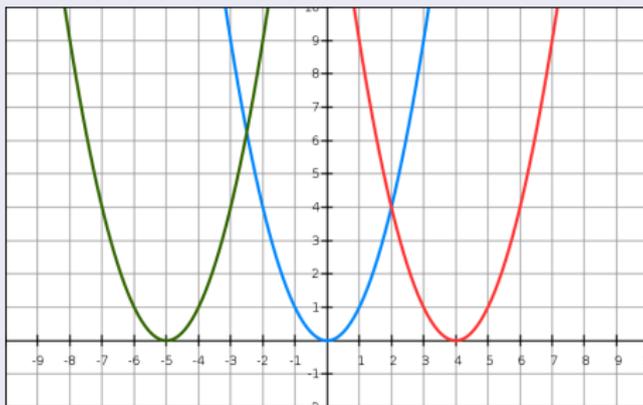
■ $y = h(x) = f\left(x + \frac{a}{2}\right)$

$$a \leq x + \frac{a}{2} \leq b$$

$$a - \frac{a}{2} \leq x \leq b - \frac{a}{2}$$

Ejemplo de desplazamiento horizontal

Si $f(x) = x^2$, $h(x) = (x - 4)^2$ y $g(x) = (x + 5)^2$, entonces para obtener la gráfica de la función h (en rojo) desplazamos la gráfica de la función f (en azul) cuatro unidades a la derecha, así $h(x) = f(x - 4)$. Para obtener la gráfica de la función g (en verde) desplazamos la gráfica de la función f (en azul) cinco unidades a la izquierda, así $g(x) = f(x + 5)$.

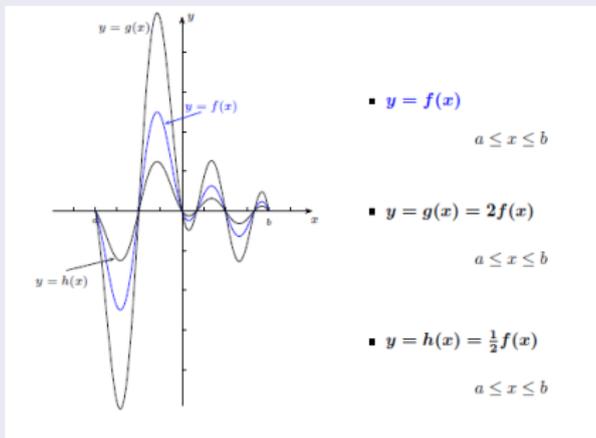


Transformaciones de Gráficas

Alargamientos y compresiones verticales

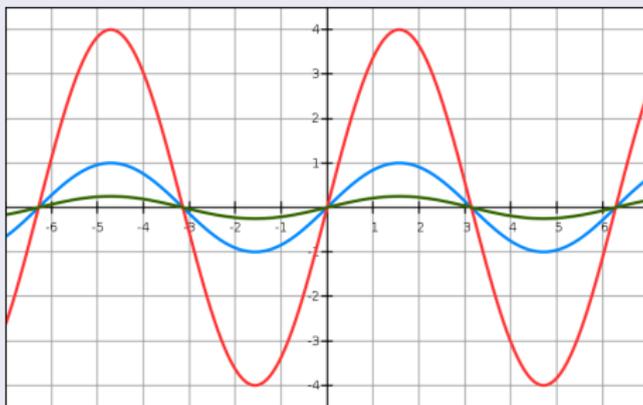
Suponga que $c > 1$. Para obtener la gráfica de

- 1 $y = cf(x)$ alárguese la gráfica de $y = f(x)$ verticalmente un factor de c .
- 2 $y = \frac{1}{c}f(x)$ comprímase la gráfica de $y = f(x)$ verticalmente un factor de c .



Ejemplo de alargamientos y compresiones verticales

Si $f(x) = \sin(x)$, $h(x) = 4 \sin(x)$ y $g(x) = \frac{1}{4} \sin(x)$, entonces para obtener la gráfica de la función h (en rojo) alargamos verticalmente la gráfica de la función f (en azul) un factor de cuatro unidades, así $h(x) = 4f(x)$. Para obtener la gráfica de la función g (en verde) comprimimos verticalmente la gráfica de la función f (en azul) un factor de cuatro unidades, así $g(x) = \frac{1}{4}f(x)$.

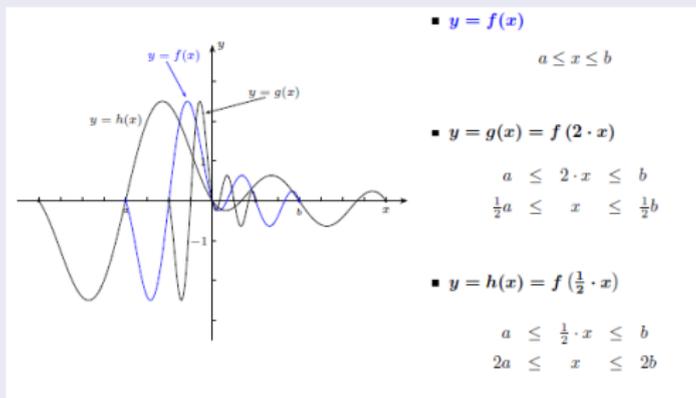


Transformaciones de Gráficas

Alargamientos y compresiones horizontales

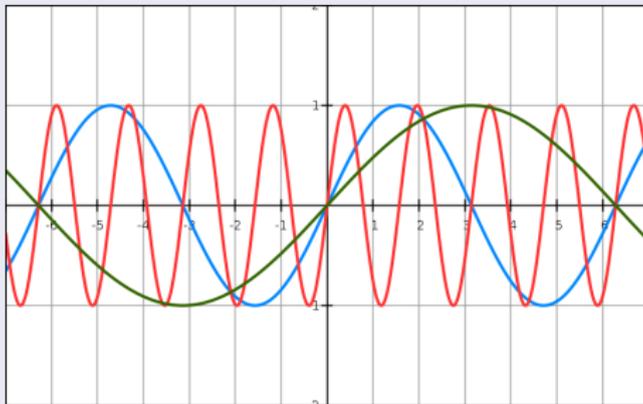
Suponga que $c > 1$. Para obtener la gráfica de

- 1 $y = f(cx)$ comprímase la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente un factor de c .
- 2 $y = f(\frac{1}{c}x)$ alárguese la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente un factor de c .



Ejemplo de alargamientos y compresiones horizontales

Si $f(x) = \sin(x)$, $h(x) = \sin(4x)$ y $g(x) = \sin(\frac{1}{2}x)$, entonces para obtener la gráfica de la función h (en rojo) comprimimos horizontalmente la gráfica de la función f (en azul) un factor de cuatro unidades, así $h(x) = f(4x)$. Para obtener la gráfica de la función g (en verde) alargamos horizontalmente la gráfica de la función f (en azul) un factor de dos unidades, así $g(x) = f(\frac{1}{2}x)$.



Transformaciones de Gráficas

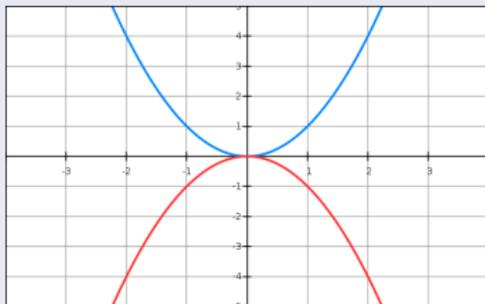
Reflexiones

Para obtener la gráfica de

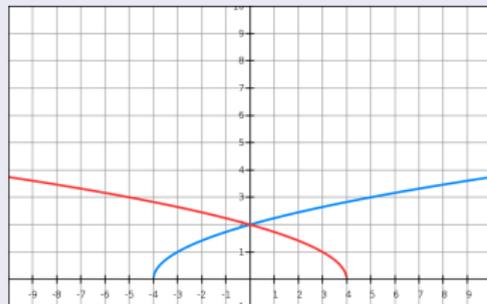
- 1 $y = -f(x)$ refléjese la gráfica de $y = f(x)$ con respecto al eje x .
- 2 $y = f(-x)$ refléjese la gráfica de $y = f(x)$ con respecto al eje y .

Ejemplo de reflejo respecto a los ejes x e y respectivamente

$f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^2$
(azul-rojo respectivamente)



$h(x) = \sqrt{4+x}$ y $k(x) = \sqrt{4-x}$
(azul-rojo respectivamente)



Referencias

Sullivan, M. *Álgebra y Trigonometría*, 7^a Edición. Editorial Pearson Prentice Hall, 2006.

Swokowski, E.W. Cole, J.A. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica* 13^a Edición. Editorial Cengage Learning, 2011

Zill, D. G. Dewar, J. M. *Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica*, 3^a Edición. Editorial McGraw-Hill, 2012.