Módulo 2 - Diapositiva 15
Función Exponencial y Logarítmica

Universidad de Antioquia

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Temas

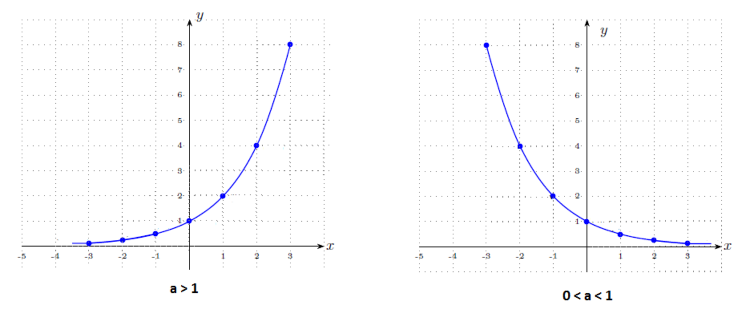
- Función Exponencial
- Propiedades de la Función Exponencial
- Función Logarítmica
- Propiedades de la Función Logarítmica

Función Exponencial

Función Exponencial de base a

Dado un número real a, con $0 < a < 1$ ó $a > 1$ se define la función exponencial de base a por:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$$
$$x \longmapsto a^x$$



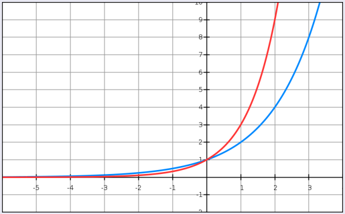
Ejemplo de gráficas de funciones exponenciales

Para graficar las funciones $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 3^x$ tenemos que:

1. $\text{dom}(f) = \mathbb{R} = \text{dom}(g)$ y $\text{ran}(f) = (0, \infty) = \text{ran}(g)$
2. No tienen intercepto con el eje x, pues $y = 0 \notin \text{ran}(f) = \text{ran}(g)$.
3. Dado que $f(0) = 1$ y $g(0) = 1$, entonces ambas funciones tiene como intercepto con el eje y a $(0, 1)$.

Hasta aquí tenemos los mismos elementos para ambas funciones, por tanto la diferencia la veremos en la tabla de valores que usemos para graficarlas.

Gráficas de $f(x) = 2^x$ (azul) y $g(x) = 3^x$ (rojo)



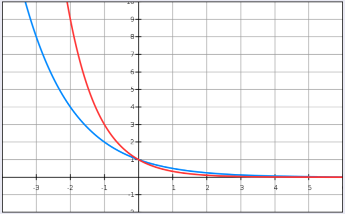
Ejemplo de gráficas de funciones exponenciales

Para graficar las funciones $f(x) = \frac{1}{2^x}$ y $g(x) = \frac{1}{3^x}$ tenemos que:

1. $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R} = \operatorname{dom}(g)$ y $\operatorname{ran}(f) = (0, \infty) = \operatorname{ran}(g)$
2. No tienen intercepto con el eje x, pues $y = 0 \notin \operatorname{ran}(f) = \operatorname{ran}(g)$.
3. Dado que $f(0) = 1$ y $g(0) = 1$, entonces ambas funciones tiene como intercepto con el eje y a $(0, 1)$.

Hasta aquí tenemos los mismos elementos para ambas funciones, por tanto la diferencia la veremos en la tabla de valores que usemos para graficarlas.

Gráficas de $f(x) = \frac{1}{2^x}$ (azul) y $g(x) = \frac{1}{3^x}$ (rojo)



Observaciones

- La función exponencial $f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$, donde $f(x) = a^x$, $a > 0$ y $a \neq 1$ es biyectiva. En particular:

$$\text{Si} \;\; a^{x_1} = a^{x_2} \;\; \text{entonces} \;\; x_1 = x_2.$$

- La gráfica de la función exponencial se acerca al eje x a medida que x crece (para $0 < a < 1$) o a medida que x decrece (para $a > 1$) pero nunca cruza el eje x. En esta caso decimos que el eje x es una asíntota horizontal de la gráfica de la función exponencial.

- Para todo par $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,

$$a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$$

y

$$\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1 - x_2}$$

Función Exponencial Natural

La función exponencial natural esta definida, para todo número real x, por:

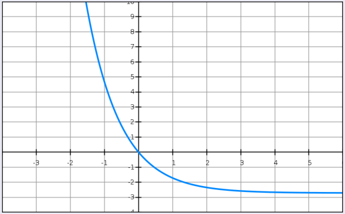
$$f(x) = e^x$$

El número e se define como el valor al que se aproxima la expresión

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

cuando n se hace arbitrariamente grande.

Gráfica de $f(x) = e^{-x+1} - e$



Problema de aplicación de la función exponencial

Crecimiento poblacional

En un cultivo de bacterias se observa que el número de bacterias se duplica cada día. Si se supone que inicialmente habían 1000 bacterias, entonces ¿al octavo día cuántas bacterias habrían? ¿cuántas al cabo de t días?

Si denotamos por t al tiempo en días, entonces la función exponencial que modela el problema anterior (número de bacterias en un tiempo t) es

$$f(t) = 1000 \cdot 2^t$$

lo que nos permite calcular el número de bacterias al cabo de t días. Así $f(0) = 1000$ es la cantidad de bacterias inicial (cero días, $t = 0$), por tanto si queremos saber la cantidad de bacterias al cabo de ocho días basta calcular

$$f(8) = 1000 \cdot 2^8 = 256000$$

Función Logarítmica

La función exponencial de base a, para un real a, con $0 < a < 1$ ó $a > 1$ se definió por:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow (0,\infty) \\ x &\longmapsto a^x \end{aligned}$$

Dado que la función es biyectiva existe su inversa que se define por:

$$\begin{aligned} f^{-1} : (0,\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a^x &\longmapsto x \end{aligned}$$

A la función f^{-1} se le denota por $\log_a$, y así tenemos la función:

$$\begin{aligned} \log_a : (0,\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \log_a(y) = x \end{aligned}$$

Es decir que:

$$\log_a(y) = x \quad \text{si y solo si} \quad a^x = y$$

Función Logarítmica

Función Logarítmica de base a

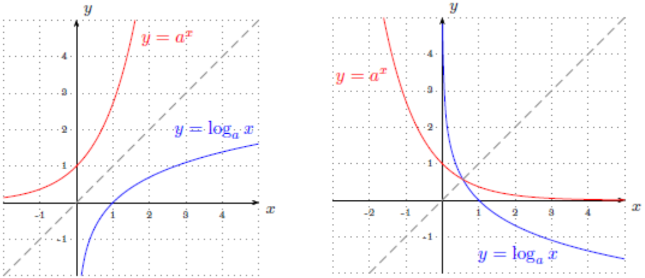
La función logarítmica de base a, con $a > 0$ y $a \neq 1$, es la función inversa de la función exponencial $y = a^x$, se denota por $y = \log_a x$ y satisface

$$y = \log_a x \iff x = a^y$$

para todo $x > 0$ y todo $y \in \mathbb{R}$.

Notar que: $\mathrm{dom}(\log_a) = (0, \infty)$ y $\mathrm{ran}(\log_a) = \mathbb{R}$

La gráfica de $y = \log_a x$ se obtiene reflejando la gráfica de $y = a^x$ con respecto a la recta $y = x$.



(a) $y = \log_a x$ con $a > 1$.

(b) $y = \log_a x$ con $a < 1$.

Ejemplos

- $\log_3 81 = 4$, porque $3^4 = 81$.
- $\log_5 \frac{1}{25} = -2$, porque $5^{-2} = \frac{1}{25}$.
- $\log_6 1 = 0$, porque $6^0 = 1$.
- $\log_9 0$ no existe, por qué?
- $\log_2 -1$ no existe, por qué?

Observaciones

- La función logarítmica $\log_a : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ es biyectiva. En particular para todo $x_1, x_2 \in (0, \infty)$

$$\text{Si } \log_a x_1 = \log_a x_2 \text{ entonces } x_1 = x_2.$$

- (Función Logaritmo Natural) La función logarítmica con base e se llama función logarítmica natural y se denota por $\ln x$. Así:

$$\ln x = \log_e x \text{ para todo } x > 0.$$

- (Función Logaritmo Común) La función logarítmica con base 10 se llama función logarítmica común y se denota por $\log x$. Así:

$$\log x = \log_{10} x \text{ para todo } x > 0.$$

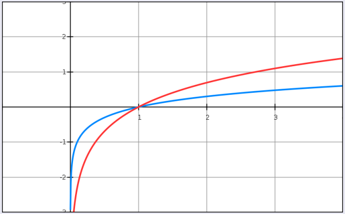
Ejemplo de gráficas de funciones logarítmicas

Para graficar las funciones $f(x) = \log(x)$ y $g(x) = \ln(x)$ tenemos que:

1. $\mathrm{dom}(f) = (0, \infty) = \mathrm{dom}(g)$ y $\mathrm{ran}(f) = \mathbb{R} = \mathrm{ran}(g)$
2. No tienen intercepto con el eje y, pues $x = 0 \notin \mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$.
3. Ya que $\log(x) = 0$, cuando $x = 1$ e igualmente y $\ln(x) = 0$, si $x = 1$, entonces ambas funciones tiene como intercepto con el eje x a $(1, 0)$.

Hasta aquí tenemos los mismos elementos para ambas funciones, por tanto la diferencia la veremos en la tabla de valores que usemos para graficarlas.

Gráficas de $f(x) = \log(x)$ (azul) y $g(x) = \ln(x)$ (rojo)



Problema de aplicación de la función logarítmica

Frecuencia de los terremotos

Sea n el número promedio de temblores por año que tienen magnitudes entre R y $R+1$ en la escala de Richter. Una fórmula que aproxima la relación entre n y R es

$$\log(n) = 7,7 - (0,9)R$$

¿Es posible determinar el valor de n para un R dado? Determine el número promedio de temblores por año, de magnitudes entre 4 y 5 en la escala de Richter y entre 6 y 7.

De la relación $\log(n) = 7,7 - (0,9)R$ y teniendo en cuenta la definición de la función logarítmica tenemos que

$$n = 10^{7,7-(0,9)R}$$

por tanto para $R = 4$ y para $R = 6$ tenemos respectivamente que

$$n = 10^{7,7-(0,9)4} \approx 12\,589 \quad \text{y} \quad n = 10^{7,7-(0,9)6} \approx 200$$

Referencias

Sullivan, M. *Álgebra y Trigonometría*, 7^a Edición. Editorial Pearson Prentice Hall, 2006.

Swokowski, E.W. Cole, J.A. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica* 13^a Edición. Editorial Cengage Learning, 2011

Zill, D. G. Dewar, J. M. *Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica*, 3^a Edición. Editorial McGraw-Hill, 2012.