Módulo 3 - Diapositiva 16
Ecuaciones Exponenciales y Logarítmicas

Universidad de Antioquia

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

UdeA

Temas

- Ecuaciones Exponenciales
- Ecuaciones Logarítmica

UdeA

Propiedades de los Exponentes

Recordemos que para $a > 0$ y $a \neq 1$, y para todo par $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ se cumple que:

$$a^0 = 1$$

$$a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$$

$$(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}$$

$$\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1 - x_2}$$

Dado que la función exponencial es biyectiva, tenemos además que:

$$a^{x_1} = a^{x_2}, \quad \text{si y solo si,} \quad x_1 = x_2.$$

Propiedades de los Logarítmos

Propiedades

Sean $a > 0, a \neq 1$, $x > 0$, $x_1 > 0$ y $x_2 > 0$. Entonces

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a a^x = x$
4. $a^{\log_a x} = x$
5. $\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$
6. $\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$
7. $\log_a x^b = b \log_a x$
8. $\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}$ con $c > 0$ y $c \neq 1$

Dado que la función logarítmica es biyectiva, tenemos además que:

$$\log_a x_1 = \log_a x_2, \quad \text{si y solo si}, \quad x_1 = x_2.$$

Ejemplos

1. Utilizando la propiedad 6 podemos determinar el valor de la expresión $\log_4 64 - \log_4 32$ así:

$$\log_4 64 - \log_4 32 = \log_4\left(\frac{64}{32}\right) = \log_4 2 = \frac{1}{2}$$

o podemos utilizar la propiedad 5 así:

$$\begin{aligned} \log_4 64 - \log_4 32 &= \log_4 32 \cdot 2 - \log_4 32 \\ &= \log_4 32 + \log_4 2 - \log_4 32 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2. Por la propiedad 4 tenemos que $2^{\log_2 5} = 5$.

3. Utilizando la propiedad 8 para determinar $\frac{\ln 4}{\ln 16}$, obtenemos que

$$\frac{\ln 4}{\ln 16} = \log_{16} 4 = \frac{1}{2}$$

Ecuaciones Exponenciales

Ejemplo 1

Para solucionar en x la ecuación $3^{x+1} = 81$ basta con escribir todo en base 3 y utilizar la inyectividad de la función exponencial así:

$$\begin{aligned} 3^{x+1} &= 81 \\ 3^{x+1} &= 3^4 \end{aligned}$$

Por tanto $x + 1 = 4$, es decir, $x = 3$ es la solución de la ecuación.

Ejemplo 2

Para solucionar la ecuación $3x^2e^x - x^3e^x = 0$ utilizamos factorización

$$3x^2e^x - x^3e^x = x^2e^x(3 - x) = 0,$$

luego

$$x^2 = 0 \quad \text{ó} \quad e^x = 0 \quad \text{ó} \quad 3 - x = 0$$

y así las soluciones a la ecuación inicial son: $x = 0$ y $x = 3$, pues $e^x \neq 0$ para todo número real x.

Ecuaciones Exponenciales

Ejemplo 3

Para encontrar la solución de la ecuación $\dfrac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}} = \dfrac{1}{3}$, procedemos así:

$$\begin{aligned}
\frac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}} &= \frac{1}{3} \\
3(10^x - 10^{-x}) &= 10^x + 10^{-x} \\
3 \cdot 10^x - 10^x &= 10^{-x} + 3 \cdot 10^{-x} \\
2 \cdot 10^x &= 4 \cdot 10^{-x} \\
\frac{10^x}{10^{-x}} &= 2 \\
10^{2x} &= 2
\end{aligned}$$

para la última ecuación utilizamos la definición de función logarítmica, por tanto, $\log(2) = 2x$ (log denota $\log_{10}$), es decir, $x = \frac{1}{2}\log(2) = \log(\sqrt{2})$, por tanto la solución a la ecuación es $x = \log(\sqrt{2})$.

Ecuaciones Logaritmicas

Ejemplo 4

Para encontrar la solución de la ecuación $\log x + \log(x+15) = 2$, primero debemos ver que tipo de restricciones se tienen para los valores de x. Dado que el dominio de la función logarítmica es $\mathbb{R}^+$, entonces se debe cumplir que $x > 0$ y $x + 15 > 0$, es decir que sus soluciones son reales positivos. Luego de conocer estas restricciones realizamos los siguientes procesos algebraicos:

$$\begin{aligned} \log x + \log(x+15) &= 2 \\ \log[x \cdot (x+15)] &= 2 \\ x(x+15) &= 10^2 \\ x^2 + 15x - 100 &= 0 \\ (x+20)(x-5) &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto $x = -20$ ó $x = 5$ y dado que x debe ser mayor que cero, la única solución posible es $x = 5$.

Ecuaciones Logaritmicas

Ejemplo 5

Para solucionar la ecuación $\log_2(\log_3 x) = 4$, note que $\log_3 x > 0$, es decir $x > 1$, pero además, en $\log_3 x$ es necesario que $x > 0$, por tanto la restricción para los valores de x es $x > 1$. Luego procedemos así:

$$\begin{aligned} \log_2(\log_3 x) &= 4 \\ 2^4 &= \log_3 x \\ \log_3 x &= 16 \\ x &= 3^{16} \end{aligned}$$

Es decir que la solución es $x = 2^{16}$.

Ecuaciones Logaritmicas

Ejemplo 6

Para la ecuación $\sqrt{\log x} = \log(\sqrt{x})$, note que los posibles valores para x deben cumplir que $\log x \geq 0$ y $x > 0$ (lado izquierdo de la ecuación), y también que $x \geq 0$ y $\sqrt{x} > 0$ (lado derecho de la ecuación). En conclusión $x \geq 1$ lo que nos garantiza que tenemos igualdad entre dos cantidades positivas, esto justifica el siguiente procedimiento:

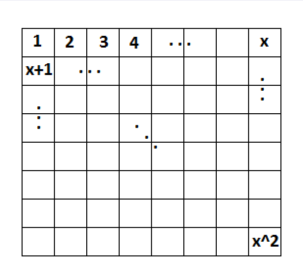
$$\begin{aligned}
\sqrt{\log x} &= \log(\sqrt{x}) \\
\log x &= [\log(\sqrt{x})]^2 \\
\log x &= \left[\frac{1}{2}\log(x)\right]^2 \\
\log x &= \frac{1}{4}(\log x)^2 \\
(\log x)^2 - 4\log x &= 0 \\
\log x[(\log x) - 4] &= 0
\end{aligned}$$

Es decir que $\log x = 0$ ó $\log x = 4$ y por tanto las soluciones a la ecuación son $x = 1$ y $x = 10^4$.

Problemas de aplicación

Ejemplo

Juan tiene una cuadrícula de x por x casillas, como la mostrada en la figura, él pone una ficha en casilla 1, luego pone en la casilla 2 el doble de fichas que las puestas en la casilla 1 y continúa de esta manera, en orden ascendente, poniendo en cada casilla el doble de fichas puestas en la casilla anterior, hasta poner 524288 fichas en la última casilla. Plantee una ecuación que represente la situación anterior y utilice esta para determinar el tamaño x de la cuadrícula de Juan.



Para solucionar el problema anterior podemos analizar el siguiente comportamiento en el número de fichas, es decir, en la casilla 1 hay una ficha, en la casilla 2 hay $2 \times 1 = 2$ fichas, en la casilla 3 hay $2 \times 2 \times 1 = 2 \times 2 = 2^2$ fichas, en la casilla 4 hay $2 \times 2 \times 2 \times 1 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$ y continua este proceso, lo cual nos induce a pensar que en la casilla x hay 2^{x-1} fichas, por tanto la ecuación en x que describiría la situación anterior sería:

$$2^{x-1} = 524288$$

Por tanto

$$\frac{2^x}{2} = 524288$$

es decir

$$2^x = 1048576$$

luego la solución es $x = \log_2(1048576) = 20$, así la cuadrícula de Juan es de 20 por 20 casillas.

UdeA

Referencias

Sullivan, M. *Álgebra y Trigonometría*, 7^a Edición. Editorial Pearson Prentice Hall, 2006.

Swokowski, E.W. Cole, J.A. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica* 13^a Edición. Editorial Cengage Learning, 2011

Zill, D. G. Dewar, J. M. *Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica*, 3^a Edición. Editorial McGraw-Hill, 2012.