Módulo 3 - Diapositiva 17
Polinomios

Universidad de Antioquia

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Temas

- Polinomios
- Teorema del Valor Intermedio
- Algoritmo de la división y División sintética

Polinomios

Polinomio en la variable x

Es una expresión de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

donde n es un entero no negativo y cada coeficiente a_k es un número real.

Cuando $a_n \neq 0$ decimos que el polinomio tiene grado n.

Ejemplos

- $p(x) = x^2 - 2x + 3$
- $p(x) = x^4 - 2x$
- $p(x) = x + 1$
- $p(x) = 5$

Polinomios en $\mathbb{C}$

Un polinomio en los complejos es una expresión de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

donde $n \in \mathbb{N}_0$ y cada coeficiente $a_k \in \mathbb{C}$ para $k = 0, 1, \cdots, n$.

Ejemplos

- $x^2 + 2i$ es un polinomio en $\mathbb{C}$ y no en $\mathbb{R}$
- $x^3 - 2x + 1$ es un polinomio en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$ (puesto que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$)

Raíz de un Polinomio

Raíz de un Polinomio

Decimos que un valor $r \in \mathbb{C}$ es una **raíz** de un polinomio $P(x)$ o una solución de la ecuación $P(x) = 0$, si $P(r) = 0$. Si la raíz es real y el polinomio tiene coeficientes reales, entonces el punto $(r, 0)$ es un punto de corte de la gráfica de P con el eje x.

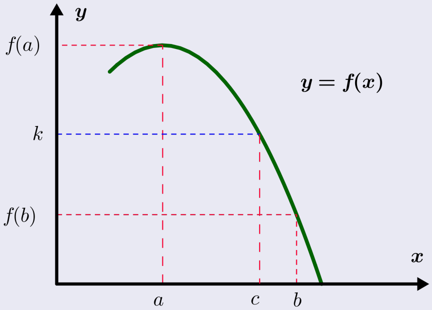
Ejemplos

- $1/2$ es una raíz de la función polinomial $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 6x - 1$, porque
$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 9 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0.$$
- $1 + i$ es una raíz de la función polinomial $P(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 6$ porque $P(1 + i) = 0$.

Teorema del Valor Intermedio para Polinomios

Teorema

Si f es una función polinomial y $f(a) \neq f(b)$ para $a < b$ entonces f toma cada valor entre $f(a)$ y $f(b)$ del intervalo (a, b). Es decir, si k es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, por lo menos hay un número c entre a y b tal que $f(c) = k$



Ejemplo

Podemos demostrar que la función f dada por

$$f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 1$$

toma el valor $k = 4$ para algún valor c entre $a = -3$ y $b = -2$, utilizando el teorema del valor intermedio así:

Calculamos $f(-3)$ y $f(-2)$, y dado que $4 \in (f(-3), f(-2)) = (1, 9)$, entonces el teorema nos permite asegurar que existe un valor $c \in (-3, -2)$ tal que $f(c) = 4$.

Notemos que el teorema no nos dice quién es el valor c, solo nos garantiza su existencia.

Observación

El teorema del valor intermedio se puede utilizar para mostrar la existencia de raíces de un polinomio.

Ejemplos

1. Para demostrar que la función $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 1$ tiene una raíz entre $a = -3$ y $b = -4$, utilizando el teorema del valor intermedio, basta con mostrar que existe un valor c en el intervalo $(-4, -3)$ tal que $f(c) = 0$, así c sería la raíz del polinomio $f(x)$ (o intersección con el eje x de la función polinomial f).

   Notemos que $f(-3) = 1 > 0$ y $f(-4) = -31 < 0$, luego el teorema del valor intermedio nos garantiza que existe un $c \in (-4, -3)$ tal que $f(c) = 0$, aunque no nos dice quien es c.

2. Dada la función polinomial $f(x) = 2x^2 - 1$, queremos saber si ella tiene o no una raíz en el intervalo $[-1, 2]$, para esto determinamos $f(-1) = 1$ y $f(2) = 7$, ya que ambos valores son positivos no podemos afirmar nada acerca de la existencia o no de una raíz en el intervalo dado.

Algoritmo de la división

Teorema

Si $f(x)$ y $p(x)$ son polinomios y $p(x) \neq 0$, entonces existen polinomios $q(x)$ y $r(x)$ tales que

$$f(x) = p(x)q(x) + r(x)$$

donde $r(x) = 0$ ó el grado de $r(x)$ es menor que el grado de $p(x)$.

El polinomio $q(x)$ es el cociente y el polinomio $r(x)$ es el residuo en la división de $f(x)$ entre $p(x)$.

Ejemplo

Dado que

$$2x^4 - x^3 - 3x^2 + 1 = (x^2 - 4)(2x^2 - x + 5) + (-4x + 21),$$

entonces el cociente de dividir el polinomio $2x^4 - x^3 - 3x^2 + 1$ entre el polinomio $x^2 - 4$ es el polinomio $q(x) = 2x^2 - x + 5$ y el residuo de dicha división es el polinomio $r(x) = -4x + 21$.

División de polinomios

Algoritmo de la división

Veamos como hallar $q(x)$ y $r(x)$ en el ejemplo anterior:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & -x^3 & -3x^2 & & +1 & x^2-4 \\
\cline{6-6}
-2x^4 & & +8x^2 & & & 2x^2-x+5 \quad \leftarrow q(x) \\
\hline
& -x^3 & +5x^2 & & +1 & \\
& x^3 & & -4x & & \\
\hline
& & 5x^2 & -4x & +1 & \\
& & -5x^2 & & +20 & \\
\hline
& & & -4x & +21 & \leftarrow r(x)
\end{array}
$$

Así

$$
\begin{array}{rcl}
2x^4-x^3-3x^2+1 & = & (x^2-4)(2x^2-x+5)+(-4x+21) \\
f(x) & = & p(x) \qquad q(x) \qquad + \quad r(x)
\end{array}
$$

División de polinomios

División sintética

Utilizaremos la el método de la división sintética para hallar el cociente y el residuo de dividir dos polinomios cuando el divisor es un polinomio de la forma $x - c$

Para hallar el cociente y el residuo de dividir $2x^4 - x^3 - 3x^2 + 1$ entre $x - 2$ procedemos así:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 2 & -1 & -3 & 0 & 1 & \underline{2} \\ & 4 & 6 & 6 & 12 & \\ \hline \end{array}$$

$$\underbrace{2 \quad 3 \quad 3 \quad 6}_{\begin{array}{c}\Downarrow \\ q(x) \\ \shortparallel \\ 2x^3 + 3x^2 + 3x + 6\end{array}} \qquad \underbrace{13}_{\begin{array}{c}\Downarrow \\ r(x) \\ \shortparallel \\ 13\end{array}}$$

Portanto

$$2x^4 - x^3 - 3x^2 + 1 = (x - 2)(2x^3 + 3x^2 + 3x + 6) + (13)$$

Referencias

Sullivan, M. *Álgebra y Trigonometría*, 7^a Edición. Editorial Pearson Prentice Hall, 2006.

Swokowski, E.W. Cole, J.A. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica* 13^a Edición. Editorial Cengage Learning, 2011

Zill, D. G. Dewar, J. M. *Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica*, 3^a Edición. Editorial McGraw-Hill, 2012.