

Módulo 3 - Diapositiva 18

Factorización de Polinomios

Universidad de Antioquia

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Temas

- Teoremas del Residuo y del Factor
- Teorema Fundamental del Álgebra
- Raíces Racionales e Irracionales
- Raíces Complejas

Teorema del Residuo

Veremos ahora algunos resultados que son válidos para polinomios $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, es decir con coeficientes en los complejos, por tanto con coeficientes reales.

Teorema

Si un polinomio $f(x)$ se divide entre $x - c$, entonces el residuo es $f(c)$.

Ejemplo

Utilizando división sintética podemos hallar el residuo de dividir $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ entre $x - 1$, así:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 1 & 1 & -2 & 1 & -1 \\
 & & 1 & -1 & 0 \\
 \hline
 & 1 & -1 & 0 & \underbrace{-1} \leftarrow \text{residuo}
 \end{array}$$

y con el teorema del residuo, tenemos que

$$f(1) = 1 - 2 + 1 - 1 = \underbrace{-1} \leftarrow \text{residuo}.$$

Teorema del Factor

Teorema

Un polinomio $f(x)$ tiene como factor a $x - c$, si y sólo si, $f(c) = 0$. Es decir que $x - c$ es factor, si y sólo si, c es raíz.

Ejemplos

- ① Dado que para $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 12$ se tiene que

$$f(-3) = (-3)^3 + 3(-3)^2 + 4(-3) + 12 = 0,$$

el teorema del factor nos dice que $x + 3$ es un factor de $f(x)$ (-3 es raíz de $f(x)$), de hecho el polinomio $f(x)$ se puede factorizar como

$$f(x) = (x + 3)(x^2 + 4).$$

- ② El teorema del factor nos garantiza que $x - 1$ es un factor de $p(x) = x^{2016} - 1$, porque $p(1) = 0$, pero que $x + 3$ no es un factor, porque $p(-3) = (-3)^{2016} - 1 \neq 0$.

Teorema Fundamental del álgebra (Carl Gauss - 1799)

Teorema Fundamental del Álgebra

Si $f(x)$ es un polinomio en los complejos de grado mayor o igual que uno, entonces $f(x)$ posee al menos una raíz, que puede ser real o compleja.

Teorema de la factorización completa para polinomios

Si $f(x)$ es un polinomio en los complejos de grado mayor o igual que uno, entonces existen $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ (no necesariamente distintos) tales que:

$$f(x) = a(x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_n)$$

siendo a el coeficiente principal de $f(x)$.

Teorema (Número máximo de raíces de un polinomio)

Todo polinomio en los complejos, de grado n , tiene como máximo n raíces complejas diferentes.

Observaciones:

- El teorema fundamental del álgebra nos garantiza la existencia de n raíces complejas (no necesariamente diferentes) para todo polinomio en los complejos, de grado $n \geq 1$.
- El teorema de factorización completa nos muestra que todo polinomio en los complejos, de grado $n \geq 1$, puede ser factorizado como el producto de n factores lineales (no necesariamente diferentes), siendo cada factor de la forma $x - z_i$ con z_i raíz del polinomio.
- El último teorema nos limita el número de raíces de un polinomio en los complejos, este número no puede superar el grado del polinomio.
- Los teoremas anteriores nos garantizan la existencia de raíces de un polinomio en los complejos y de su factorización completa, pero no nos dan un método para hallarlas, aun así, la combinación de ellos, en ocasiones nos permite una factorización completa.

Ejemplos

- ❶ El polinomio $p(x) = x^2 - 1$ tiene como máximo dos raíces complejas y puede ser escrito como el producto de dos polinomios lineales así:

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1),$$

es decir que 1 y -1 son dos raíces diferentes de $p(x)$.

- ❷ $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)(x - 1)$ tiene una única raíz que es 1 y se puede escribir como el producto de dos factores lineales repetidos.
- ❸ El polinomio $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$ tiene dos raíces complejas diferentes (ninguna de ellas real).
- ❹ El polinomio $x^3 - x^2 + x - 1 = (x - 1)(x + i)(x - i)$ tiene tres raíces complejas diferentes (una de ellas es una raíz real).
- ❺ El polinomio $x^2 + (1 - i)x - i = (x + 1)(x - i)$ tiene dos raíces complejas diferentes (una de ellas es una raíz real).

Multiplicidad de una raíz

Si un factor $x - c$ se presenta m veces en la factorización del polinomio $f(x)$, entonces decimos que c es una raíz de multiplicidad m del polinomio $f(x)$.

Teorema (Número exacto de raíces de un polinomio)

Si $f(x)$ es un polinomio de grado $n \geq 1$ y si cada raíz de multiplicidad m se cuenta m veces, entonces $f(x)$ tiene precisamente n raíces.

Ejemplo

El polinomio $f(x) = x^3(x + 2)(x - 2)^4$ tiene grado 8, sus raíces son: 0 de multiplicidad tres, -2 de multiplicidad uno y 2 de multiplicidad cuatro, así al sumar las multiplicidades de cada raíz obtenemos como resultado el grado del polinomio.

Raíces Racionales e Irracionales

Teorema (Raíces racionales de un polinomio)

Toda raíz racional de un polinomio con coeficientes enteros

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

es de la forma

$$\frac{c}{d},$$

donde c es un divisor de a_0 y d es un divisor de a_n .

Este teorema no da un método para hallar las raíces racionales de un polinomio, pero si determina que si existe una raíz racional esta debe tener la forma mencionada, por tanto conociendo los divisores de a_0 y de a_n y realizando su cociente se obtendrán los candidatos a raíces del polinomio.

Raíces Racionales e Irracionales

Ejemplo 1

Para hallar todas las raíces racionales de $P(x) = x^3 - 3x + 2$, procedemos hallando los divisores de $a_0 = 2$ y $a_n = 1$:

Divisores de $a_0 = 2$: $\pm 1, \pm 2$ Divisores de $a_n = 1$: ± 1 .

Utilizando el teorema anterior podemos concluir que si $P(x)$ tiene raíces racionales estas deben estar en la siguiente lista: $\pm 1, \pm 2$. Para verificar si alguno de estos valores es o no una raíz basta con aplicar el teorema del factor:

$$P(1) = 0, \quad P(-1) = 4, \quad P(2) = 4, \quad P(-2) = 0$$

lo que muestra que $P(x)$ tiene dos raíces racionales: 1 y -2 . Podemos además factorizar completamente el polinomio utilizando esta información y división sintética:

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2).$$

Raíces Racionales e Irracionales

Ejemplo 2

Veamos que el $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x + 6$ no tiene raíces racionales. Para esto tenemos que

Divisores de 6 : $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ Divisores de 1 : ± 1 .

Por tanto las posibles raíces racionales de $P(x)$ son:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$

y utilizando el teorema del factor, obtenemos que:

$$\begin{array}{llll} P(1)=6, & P(-1)=12, & P(2)=18, & P(-2)=18, \\ P(3)=47, & P(-3)=18, & P(6)=306, & P(-6)=-78, \end{array}$$

lo que muestra que $P(x)$ no tiene raíces racionales.

Raíces Racionales e Irracionales

Raíces irracionales conjugadas

Si los coeficientes de

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad a_n \neq 0$$

son enteros y si $c_1 = s + t\sqrt{u}$ es una raíz irracional de $p(x)$ (con $u \in \mathbb{N}$ no cuadrado perfecto y $s, t \in \mathbb{Z}$), entonces $c_2 = s - t\sqrt{u}$ también es una raíz de $p(x)$.

Este teorema nos dice que las raíces irracionales (de un polinomio con coeficientes enteros) de la forma $s + t\sqrt{u}$ vienen por pares conjugados, no afirma que todas las raíces irracionales viene por pares conjugadas, solo las de esta forma.

Ejemplo

Hallar el polinomio de menor grado con coeficientes enteros tal que 3 y $1 + \sqrt{2}$ son dos raíces del polinomio.

Notemos que se quiere el polinomio de menor grado con estas características, pues cualquier otro múltiplo de este polinomio también cumplirá estas propiedades. Dado que el polinomio pedido debe tener coeficientes enteros entonces por el teorema anterior si $1 + \sqrt{2}$ es raíz, también debe serlo $1 - \sqrt{2}$, tomaremos entonces el siguientes polinomio mónico (coeficiente principal es 1):

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - 3) [x - (1 + \sqrt{2})] [x - (1 - \sqrt{2})] \\ &= (x - 3) [(x - 1) - \sqrt{2}] [(x - 1) + \sqrt{2}] \\ &= (x - 3) [(x - 1)^2 - 2] \\ &= (x - 3)(x^2 - 2x - 1) \\ &= x^3 - 5x^2 + 5x + 3 \end{aligned}$$

Polinomios

Suma y producto de raíces

La suma y el producto de las raíces del polinomio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

vienen dados en términos de sus coeficientes por medio de:

- Suma de raíces = $-\frac{a_{n-1}}{a_n}$
- Producto de raíces = $(-1)^n \frac{a_0}{a_n}$

Ejemplo

Para el polinomio

$$P(x) = 2x^5 - 3x^4 - 2x + 3$$

tenemos que $a_0 = 3$, $a_{n-1} = -3$ y $a_n = 2$, por tanto al sumar sus raíces debemos obtener el valor $\frac{3}{2}$ y al multiplicar sus raíces debemos obtener el valor $-\frac{3}{2}$. De hecho sus raíces son $1, -1, \frac{3}{2}$.

Polinomios

Polinomio Irreducible

Un polinomio con coeficientes en algún conjunto S de números es **irreducible** sobre S , si no se puede escribir como el producto de dos polinomios de grado positivo con coeficientes en S .

Ejemplo

- $x^2 - 5$ es irreducible sobre los racionales por que no se puede escribir como el producto de dos polinomios que tengan coeficiente racionales. Sin embargo $x^2 - 5$ no es irreducible sobre los reales porque se puede escribir como

$$x^2 - 5 = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$$

- Todo polinomio sobre $\mathbb{R}$ de la forma $ax + b$ de grado 1 es irreducible sobre $\mathbb{R}$, por ejemplo el polinomio $2x + 1$ o el polinomio $\frac{1}{2}x + \pi$.

Raíces Complejas

Teorema (Raíces complejas conjugadas de un polinomio)

Si un polinomio $f(x)$ de grado $n \geq 1$ tiene coeficientes reales y si $z = a + bi$ con $b \neq 0$ es una raíz compleja de $f(x)$, entonces su conjugado $\bar{z} = a - bi$ también es una raíz de $f(x)$.

Este teorema nos dice que las raíces complejas (con parte imaginaria no nula), de polinomios con coeficientes reales, vienen por pares conjugados.

Corolario

Todo polinomio con coeficientes reales y de grado impar tiene al menos una raíz real.

Ejemplo

Encuentre un polinomio con coeficientes reales de menor grado que tenga por raíz a -4 con multiplicidad dos y a $2 - 3i$ con multiplicidad uno.

Un polinomios que cumple con las condiciones dadas es:

$$\begin{aligned} p(x) &= [x - (-4)]^2 [x - (2 - 3i)] [x - (2 + 3i)] \\ &= (x + 4)^2 [(x - 2) + 3i] [(x - 2) - 3i] \\ &= (x + 4)^2 [(x - 2)^2 - (3i)^2] \\ &= (x + 4)^2 (x^2 - 4x + 4 + 9) \\ &= (x^2 + 8x + 16)(x^2 - 4x + 13) \\ &= x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 40x + 208 \end{aligned}$$

Referencias

Sullivan, M. *Álgebra y Trigonometría*, 7^a Edición. Editorial Pearson Prentice Hall, 2006.

Swokowski, E.W. Cole, J.A. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica* 13^a Edición. Editorial Cengage Learning, 2011

Zill, D. G. Dewar, J. M. *Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica*, 3^a Edición. Editorial McGraw-Hill, 2012.