Módulo 3-Diapositiva 19
Trigonometría

Universidad de Antioquia

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

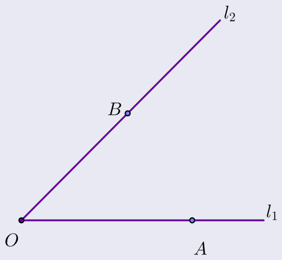
Temas

- Ángulos
- Medidas de ángulos
- Razones trigonométricas

Ángulos

Ángulos

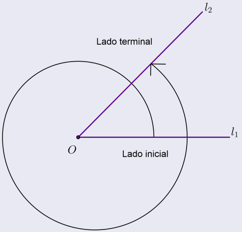
Un ángulo es la figura geométrica formada por dos semirrectas l_1 y l_2 que tienen un punto extremo en común O. Si A y B son puntos en l_1 y l_2, nos referimos al ángulo $\angle AOB$.



Ángulos Coterminales

Ángulos Coterminales

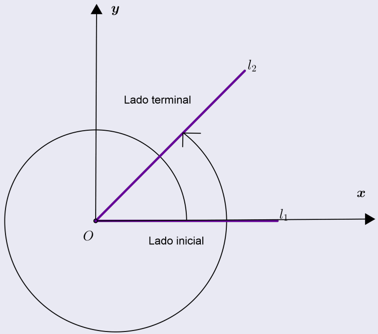
En trigonometría interpretamos los ángulos como rotaciones de rayos. Empezamos con un rayo fijo l_1, que tiene un punto extremo O y lo giramos alrededor de O, en un plano, a una posición específicada por el rayo l_2. Llamamos a l_1 el lado inicial y a l_2 el lado terminal. Dos ángulos son coterminales si tienen el mismo lado inicial y el mismo lado terminal.



Ángulos

Posición estándar

Un ángulo está en posición estándar si el vértice O coincide con el origen y el lado inicial l_1 coincide con el eje x. El ángulo es positivo si el sentido es antihorario y el ángulo es negativo si el sentido es horario.



Medida de ángulos

Los ángulos se pueden medir en grados o en radianes.

Grados sexagesimales

Un grado (1°) es la medida de un ángulo cuyo lado terminal se obtiene al rotar el lado inicial $1/360$ de la circunferencia en sentido antihorario. Un grado se divide en 60 minutos y un minuto en 60 segundos.

Radianes

Un ángulo central es un ángulo cuyo vértice está en el centro de una circunferencia. Un radián es la medida de un ángulo central subtendido por un arco de longitud igual a la del radio de la circunferencia donde se encuentra inscrito.

Clasificación de ángulos

De acuerdo a su medida, los ángulos pueden clasificarse como:

Terminología	Definición	Ejemplo
Ángulo agudo	$0 < \theta < 90$	$\theta = 65$
Ángulo obtuso	$90 < \theta < 180$	$\theta = 145$
Ángulos complementarios α y β	$\alpha + \beta = 90$	$\alpha = 25, \beta = 65$
Ángulos suplementarios α y β	$\alpha + \beta = 180$	$\alpha = 60, \beta = 120$

Relaciones entre grados y radianes

$$180^\circ = \pi \quad \text{radianes}$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \quad \text{radián} \qquad\qquad 1 \quad \text{radián} = \frac{180^\circ}{\pi}.$$

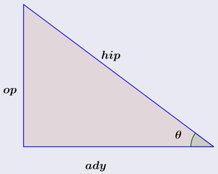
Ejemplos

- Los ángulos $\alpha = 30^\circ$ y $\beta = \frac{\pi}{3}$ radianes, son agudos.
- Los ángulos $\alpha = 130^\circ$ y $\beta = \frac{3}{4}\pi$ radianes, son obtusos.
- Los ángulos λ y θ son complementarios para $\lambda = 75^\circ$ y $\theta = 15^\circ$
- Los ángulos μ y ρ son suplementarios para $\mu = \frac{3}{5}\pi$ radianes y $\rho = \frac{2}{5}\pi$ radianes.
- Si la medida del ángulo α es 30 grados, entonces la medida del ángulo α en radianes es $\frac{\pi}{6}$.
- Un ángulo cuya medida es 45 grados, tendrá una medida de $\frac{\pi}{4}$ radianes.
- Un ángulo cuya medida es $\frac{3\pi}{2}$ radianes, tendrá una medida de 270°.

Razones trigonométricas

Razones trigonométricas

Dado un triángulo rectángulo que tenga a θ como uno de sus ángulos agudos, se definen las razones trigonométricas para el ángulo θ: seno (sen), coseno (cos), tangente (tan), cotangente (cot), secante (sec) y cosecante (csc) del ángulo θ por medio de las razones:



- $\operatorname{sen}\theta = \frac{op}{hip}$
- $\csc\theta = \frac{hip}{op}$
- $\cos\theta = \frac{ady}{hip}$
- $\sec\theta = \frac{hip}{ady}$
- $\tan\theta = \frac{op}{ady}$
- $\cot\theta = \frac{ady}{op}$

Ejercicio resuelto 1

Determine las seis razones trigonométricas de un ángulo θ en un triángulo rectangulo cuyos catetos miden 2cm cada uno.

Notemos que el triángulo descrito es isosceles, por tanto podemos tomar cualquiera de sus dos ángulos agudos (ambos son iguales) θ, siendo por tanto el cateto adyacente al ángulo θ igual al cateto opuesto al ángulo θ, además utilizando el Teorema de Pitágoras encontramos que su hipotenusa $h = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ cm, luego:

- $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\cos\theta = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\tan\theta = \dfrac{2}{2} = 1$
- $\csc\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$
- $\sec\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$
- $\cot\theta = \dfrac{2}{2} = 1$

Ejercicio resuelto 2

Determine las seis razones trigonométricas de un ángulo θ en un triángulo rectangulo cuyo cateto adyacente al ángulo θ mide 1cm y el opuesto mide $\sqrt{3}$ cm.

En el triángulo descrito tenemos por Pitágoras que su hipotenusa $h = 2$cm, luego:

- $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$
- $\tan\theta = \sqrt{3}$
- $\csc\theta = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$
- $\sec\theta = 2$
- $\cot\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Si queremos determinar las razones trigonométricas para un ángulo de 45°, basta utilizar el hecho que si en un triángulo rectángulo uno de sus ángulos agudos θ mide 45°, entonces el triángulo es isosceles, por tanto el cateto adyacente y el cateto opuesto al ángulo θ miden lo mismo, así las medidas de la hipotenusa y de los catetos son respectivamente: $h = x\sqrt{2}$ y $c_{ady} = c_{op} = x$, por tanto las razones trigonométricas no dependeran del valor de x y podemos tomar en particular el valor $x = 1$, lo que nos llevaría a las razones determinadas en el ejercicio resuelto 1, por tanto:

Razones trigonométricas para $\theta = 45^\circ$

- $\operatorname{sen} 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\tan 45^\circ = \dfrac{2}{2} = 1$
- $\csc 45^\circ = \sqrt{2}$
- $\sec 45^\circ = \sqrt{2}$
- $\cot 45^\circ = 1$

Para determinar las razones trigonométricas para los ángulos $\theta = 30^\circ$ y $\beta = 60^\circ$, basta notar que en un triángulo equilátero de lado x (todos sus ángulos miden 60° y todos sus lados miden lo mismo) al trazar la altura dividimos el triángulo en dos triángulos rectángulos iguales con ángulos agudos $\theta = 30^\circ$ y $\beta = 60^\circ$ y donde la hipotenusa, el cateto adyacente y el cateto opuesto al ángulo β miden respectivamente: x, $\frac{1}{2}x$, $\frac{\sqrt{3}}{2}x$. Por tanto las razones trigonométricas no dependeran del valor de x y podemos tomar en particular el valor $x = 2$, lo que nos llevaría a las razones determinadas en el ejercicio resuelto 2, por tanto:

Razones trigonométricas para $\theta = 30^\circ$ y $\beta = 60^\circ$

- $\operatorname{sen} 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\operatorname{sen} 30^\circ = \dfrac{1}{2}$
- $\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$
- $\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$
- $\tan 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Referencias

Sullivan, M. *Álgebra y Trigonometría*, 7^a Edición. Editorial Pearson Prentice Hall, 2006.

Swokowski, E.W. Cole, J.A. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica* 13^a Edición. Editorial Cengage Learning, 2011

Zill, D. G. Dewar, J. M. *Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica*, 3^a Edición. Editorial McGraw-Hill, 2012.