Módulo 1 - Diapositiva 2
Axiomas de Campo para ($\mathbb{R}$)

Universidad de Antioquia

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Temas

- Axiomas de campo para $\mathbb{R}$
- Propiedades de los números reales

Axiomas de Campo

Determine el o los procedimientos equivocados en el siguiente argumento:

Demostración de que $1 = 2$

La siguiente tabla muestra las operaciones y su respectiva justificación para demostrar que $1 = 2$ a partir de la hipótesis de que dos números reales a y b son iguales:

Operación	Justificación
$a = b$	Hipótesis
$ab = b^2$	Multiplicación por b en ambos lados
$-ab = -b^2$	Multiplicación por -1 en ambos lados
$a^2 - ab = a^2 - b^2$	Suma de a^2 en ambos lados
$a(a-b) = (a-b)(a+b)$	Factorización en ambos lados
$a = a + b$	Cancelación de $a - b$ en ambos lados
$b = 2b$	Sustitución de a por b, pues $a = b$
$1 = 2$	Cancelación de b en ambos lados

Conclusión: $1 = 2$

En el conjunto de los números reales se definen dos operaciones binarias: la adición $(+)$ y la multiplicación o producto $(\cdot)$

El conjunto de los números reales es cerrado respecto a la operación adición$(+)$

1. A cada par de números reales a y b le corresponde un único número real $a + b$.

El conjunto de los números reales es cerrado respecto a la operación multiplicación $(\cdot)$

1. A cada par de números reales a y b le corresponde un único número real $a \cdot b$.

Ejemplo:

1. $1 + \sqrt{2}$ es un número real porque es la suma de dos números reales.
2. $\pi \cdot 2$ es un número real porque es el producto de dos números reales.

Propiedades de la adición

1. La adición es <u>conmutativa</u>: $a + b = b + a$
2. La adición es <u>asociativa</u>: $a + (b + c) = (a + b) + c$
3. 0 es el <u>neutro aditivo</u>: $a + 0 = a$
4. $-a$ es el <u>inverso aditivo</u> o <u>negativo</u> de a: $a + (-a) = 0$

Propiedades de la multiplicación

1. La multiplicación es <u>conmutativa</u>: $ab = ba$
2. La multiplicación es <u>asociativa</u>: $a(bc) = (ab)c$
3. 1 es el <u>neutro multiplicativo</u>: $a \cdot 1 = a$
4. $\dfrac{1}{a} = a^{-1}$ es el <u>inverso multiplicativo</u> (recíproco) de a: $a \cdot \left(\dfrac{1}{a}\right) = 1$, si $a \neq 0$,

Relación entre adición y multiplicación

1. La multiplicación es distributiva sobre la adición:

$$a(b+c) = ab + ac \quad \text{y} \quad (a+b)c = ac + bc$$

Las once propiedades anteriores: cinco para la suma, cinco para el producto y una que relaciona la suma con el producto son los axiomas de campo que cumplen los números reales, por esto se dice que $\mathbb{R}$ es un campo o se habla del campo de los números reales.

Ejemplo:

1. El inverso aditivo de -2 es 2 porque $-2+2=0$.
2. El inverso multiplicativo de $\frac{2}{\sqrt{3}}$ es $\frac{\sqrt{3}}{2}$ porque $\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$.
3. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + 2\right) \cdot \sqrt{2} = 1 + 2\sqrt{2}$

Propiedades de los números reales

La multiplicación y el cero

- $a \cdot 0 = 0$, para todo $a \in \mathbb{R}$
- Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ ó $b = 0$

Propiedades en la igualdad

1. Si $a = b$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces: $a + c = b + c$ y $ac = bc$.
2. Si $ac = bc$ y $c \neq 0$, entonces $a = b$ (Ley de cancelación)

Ejemplo:

1. $\sqrt{2} \cdot 0 = 0$.
2. Ya que $\frac{1}{2} \neq 0$ y $\sqrt{3} \neq 0$, entonces $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \neq 0$.
3. Dado que $(2 - 3) = (4 - 5)$, entonces $(2 - 3)\sqrt{2} = (4 - 5)\sqrt{2}$.

Propiedades de los números reales

Ley de los signos (inversos aditivos)

Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ se cumple que:

- $(-1)a = -a$
- $-(-a) = a$
- $(-a)b = a(-b) = -(ab)$
- $(-a)(-b) = ab$

Sustracción(inverso aditivo) y división (inverso multiplicativo)

- $a - b = a + (-b)$
- $a \div b = a \cdot \dfrac{1}{b} = a \cdot b^{-1}$, si $b \neq 0$

Propiedades de cocientes

Para $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, con $b \neq 0$ y $d \neq 0$, se cumple que:

- $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, si y solo si, $ad = bc$
- $\dfrac{ad}{bd} = \dfrac{a}{b}$
- $\dfrac{a}{-b} = \dfrac{-a}{b} = -\dfrac{a}{b}$
- $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b} = \dfrac{a+c}{b}$
- $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$
- $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$
- $\dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c} = \dfrac{ad}{bc}$, con $c \neq 0$

Ejemplo.

Operaciones con fracciones

1. $\frac{4}{6}+\frac{3}{7}=\frac{23}{21}$
2. $\frac{4}{5}-\frac{1}{7}=\frac{23}{35}$
3. $\frac{9}{15}-\frac{3}{8}=\frac{9}{40}$
4. $\frac{1}{5}+\frac{4}{3}+\frac{1}{2}=\frac{61}{30}$
5. $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)=\frac{5}{8}$
6. $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{10}$
7. $\frac{3}{7}\div\frac{2}{8}=\frac{12}{7}$
8. $\frac{1}{9}+\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{7}=\frac{34}{63}$

Ejercicio. Determine que significa $a \div b$ si:

1. $a=0$ y $b\neq 0$
2. $a\neq 0$ y $b=0$
3. $a=0$ y $b=0$

Referencias

Sullivan, M. *Álgebra y Trigonometría*, 7^a Edición. Editorial Pearson Prentice Hall, 2006.

Swokowski, E.W. Cole, J.A. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica* 13^a Edición. Editorial Cengage Learning, 2011

Zill, D. G. Dewar, J. M. *Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica*, 3^a Edición. Editorial McGraw-Hill, 2012.