Módulo 3-Diapositiva 20
Funciones Trigonométricas

Universidad de Antioquia

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

UdeA

Temas

- Funciones Trigonométricas
- Gráficas de las Funciones Trigonométricas

UdeA

Funciones Trigonométricas

Funciones Trigonométricas de Números Reales

Sean $t \in \mathbb{R}$ y $P(x, y)$ un punto arbitrario sobre el lado terminal de un ángulo central de t radianes, ubicado a una distancia $r > 0$ del origen:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Definimos las funciones trigonométricas para el ángulo t, así:

- $\operatorname{sen} t = \dfrac{y}{r}$
- $\cos t = \dfrac{x}{r}$
- $\tan t = \dfrac{y}{x}$, si $x \neq 0$
- $\csc t = \dfrac{r}{y}$, si $y \neq 0$
- $\sec t = \dfrac{r}{x}$, si $x \neq 0$
- $\cot t = \dfrac{x}{y}$, si $y \neq 0$

Ejemplos

- Para determinar las seis funciones trigonométricas para el ángulo central t si el punto $P(1,2)$ está sobre el lado terminal de dicho ángulo, calculamos primero $r = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ y luego calculamos las funciones así:
    - $\operatorname{sen} t = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$
    - $\csc t = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$
    - $\cos t = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$
    - $\sec t = \dfrac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5}$
    - $\tan t = \dfrac{2}{1} = 2,$
    - $\cot t = \dfrac{1}{2}$
- Si para el mismo ángulo t tomamos el punto $P(x, 2x)$ con $0 \neq x \in \mathbb{R}$, entonces $r = \sqrt{x^2 + 4x^2} = x\sqrt{5}$, por tanto
    - $\operatorname{sen} t = \dfrac{2x}{x\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$
    - $\cos t = \dfrac{x}{x\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Observaciones

- Las funciones trigonométricas sólo dependen del número real t y no del punto $P(x, y)$ del lado terminal.
- $\cos 30$ es el coseno de un ángulo de 30 radianes y no de 30°, es decir, $\cos 30 \neq \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Para todo $t \in \mathbb{R}$

$$\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = 1.$$

Signo de las funciones trigonométricas

Función	Cuadrante I	Cuadrante II	Cuadrante III	Cuadrante IV
$\operatorname{sen} x$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos x$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\tan x$	$+$	$-$	$+$	$-$
$\csc x$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\sec x$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\cot x$	$+$	$-$	$+$	$-$

Ejemplos

1. Si $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ y α tiene el lado terminal en el cuarto cuadrante, entonces para determinar las funciones seno y tangente de α tomamos $x = 4$ y $r = 5$, por tanto $y = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ y teniendo en cuenta que en el cuadrante IV ámbas funciones son negativas obtenemos:

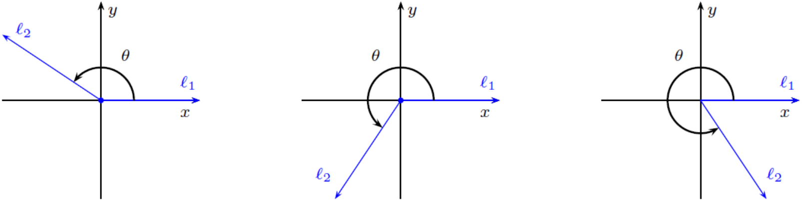
$$\operatorname{sen}\alpha = -\frac{3}{5} \quad \text{y} \quad \tan\alpha = -\frac{3}{4}$$

2. Si $\csc\theta = -2$ y $\tan\theta > 0$, entonces para hallar el valor de $\operatorname{sen}\theta$ y $\tan\theta$, tomamos $r = 2$ y $y = -1$, por tanto $x = \sqrt{3}$. Dado que para θ cosecante es negativa y tangente es positiva, entonces el ángulo está en el cuadrante III donde seno y tangente son negativas, así:

$$\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ángulo de Referencia

Sea θ un ángulo en posición estándar cuyo lado terminal NO yace sobre cualquiera de los ejes coordenados. El ángulo de referencia de θ es el ángulo agudo θ_R que forma el lado terminal de θ con el eje x.



(a) $\theta_R = \pi - \theta$ (b) $\theta_R = \theta - \pi$ (c) $\theta_R = 2\pi - \theta$

Observación

Si θ es un ángulo en posición estandar, entonces para hallar el valor de una función trigonométrica en θ se encuentra su valor para el ángulo de referencia θ_R y se le pone como prefijo el signo que tiene la función trigonométrica en el cuadrante al que pertenece θ.

Ejemplos

- El lado terminal del ángulo $\alpha = 315^\circ$ se encuentra en el cuadrante IV en el cual la función seno tiene signo negativo y dado que $\alpha_R = 360^\circ - 315^\circ = 45^\circ$, entonces

$$\sin 315^\circ = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

- Para $\beta = \dfrac{2\pi}{3}$, se tiene que $\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{2\pi}{3} < \pi$ (cuadrante II), por tanto $\beta_R = \pi - \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3}$ y así

$$\cos \frac{2\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

Gráficas de las Funciones Trigonométricas

Gráfica de la función seno

La función $f(x) = \operatorname{sen} x$, tiene las siguientes características:

La función *seno*

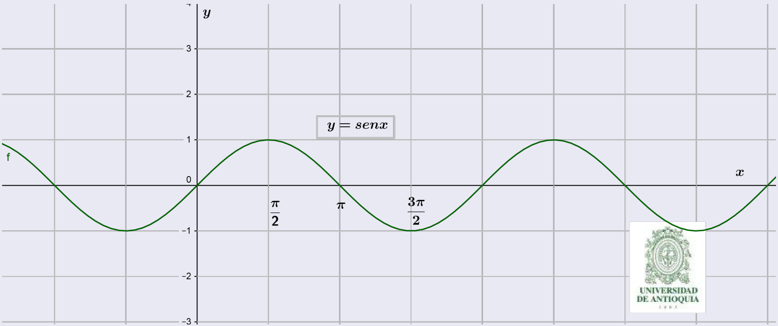
- Dom(f)=$\mathbb{R}$ y Ran(f)= $[-1, 1]$
- Intercepto con el eje y: $(0, 0)$.
- Interceptos con el eje x: $\{(x, 0) \,|\, x = n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$.
- $f(x) = \operatorname{sen} x$ es una función periódica de periodo 2π, es decir $f(x + 2\pi) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$

Para graficar la función $y = \operatorname{sen} x$, se puede utilizar la información anterior y la siguiente tabla de valores:

x	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\operatorname{sen} x$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Gráfica de la Función Seno

$y = \operatorname{sen} x$



Gráficas de las Funciones Trigonométricas

Gráfica de la función coseno

La función $f(x) = \cos x$, tiene las siguientes características:

La función coseno

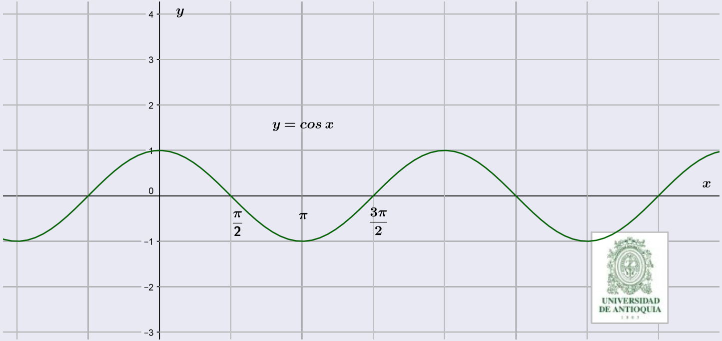
- Dom(f)=$\mathbb{R}$ y Ran(f)= $[-1, 1]$
- Intercepto con el eje y: $(0, 1)$.
- Interceptos con el eje x: $\{(x, 0) \,|\, x = n\pi + \frac{\pi}{2},\, n \in \mathbb{Z}\}$.
- $f(x) = \cos x$ es una función periódica de periodo 2π, es decir $f(x + 2\pi) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$

Para graficar la función $y = \cos x$, se puede utilizar la información anterior y la siguiente tabla de valores:

x	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\cos x$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

Gráfica de la Función Coseno

$y = \cos x$



Gráficas de las Funciones Trigonométricas

Gráfica de la función tangente

La función $f(x) = \tan x$, se puede ver como el cociente de las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, así $f(x) = \tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ tiene las siguientes características:

La función tangente

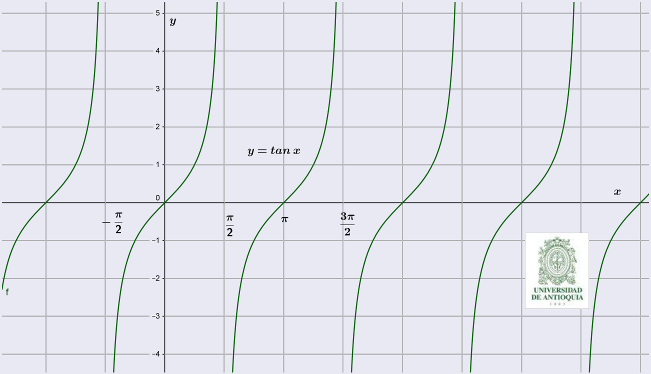
- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi n \,|\, n \in \mathbb{Z} \right\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, \cos x \neq 0\}$
- $\mathrm{Ran}(f) = \mathbb{R}$
- Los interceptos con los ejes son los mismos interceptos de la función seno, es decir, $\{(x, 0) \,|\, x = n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$.
- $f(x) = \tan x$ es una función periódica de periodo π, es decir $f(x + \pi) = f(x)$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$.

Para graficar la función $y = \tan x$, se puede utilizar la información anterior y la siguiente tabla de valores:

x	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\tan x$	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0

Gráfica de las Función Tangente

Función $y = \tan x$



Referencias

Sullivan, M. *Álgebra y Trigonometría*, 7^a Edición. Editorial Pearson Prentice Hall, 2006.

Swokowski, E.W. Cole, J.A. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica* 13^a Edición. Editorial Cengage Learning, 2011

Zill, D. G. Dewar, J. M. *Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica*, 3^a Edición. Editorial McGraw-Hill, 2012.