

Módulo 3-Diapositiva 21

Funciones Trigonométricas Inversas

Universidad de Antioquia

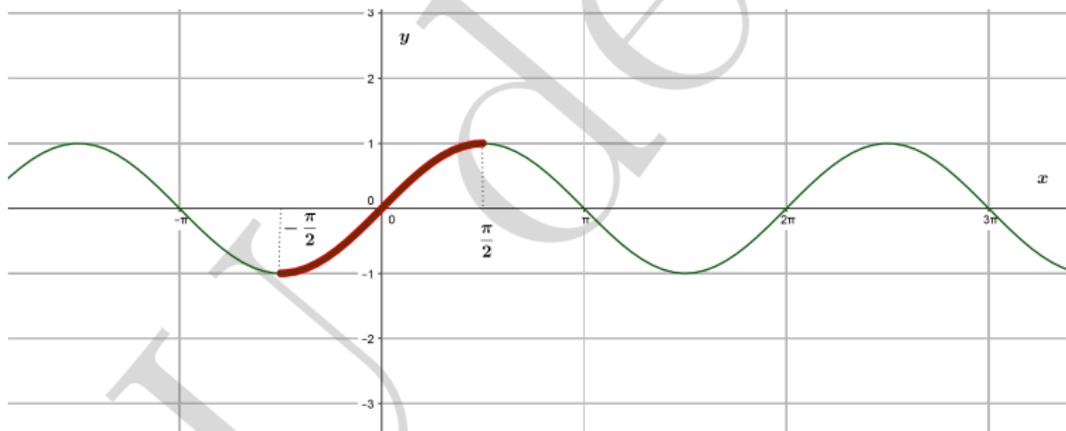
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

- Funciones Trigonómicas Inversas
- Gráficas de las Funciones Trigonómicas Inversas

Función Arcseno o Seno Inverso

Función seno

La función seno no es biyectiva. Si restringimos su dominio a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ obtenemos una función biyectiva.



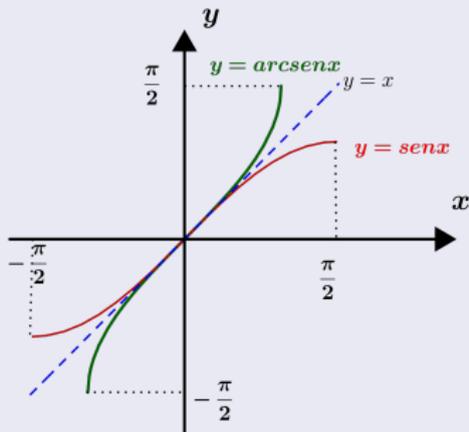
Función Arseno o Seno Inverso

La función seno inverso, denotada por sen^{-1} , se define como

$$y = \text{sen}^{-1} x, \quad \text{si y sólo si,} \quad x = \text{sen } y$$

para

$$-1 \leq x \leq 1 \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$



Función Seno Inverso

- El dominio de la función seno inverso es : $[-1, 1]$
- El rango o imagen de la función seno inverso es: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Propiedades

- $\text{sen}(\text{sen}^{-1} x) = x$, si $-1 \leq x \leq 1$
- $\text{sen}^{-1}(\text{sen} y) = y$, si $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

Observación

La función seno inverso (que es la función inversa de la función seno restringida) también se denomina **función arcoseno** y la notación $\text{arcsen}(x)$ se puede usar en lugar de $\text{sen}^{-1}(x)$

Ejemplo

- Para determinar el valor de $\text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, notemos que

$$\alpha = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right), \quad \text{si} \quad \text{sen} \alpha = \frac{1}{2}, \quad \text{con} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2},$$

y ya que sabemos que $\text{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}$, entonces

$$\text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30^\circ.$$

- Para determinar $\text{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \theta$, notemos que la función seno es negativa para ángulos en el cuadrante II y IV, entonces θ está en el cuadrante IV y es un ángulo tomado en sentido horario (ángulo negativo $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$). Ahora como

$$\text{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

entonces $\theta = -60^\circ$ y por tanto

$$\text{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -60.$$

Ejercicio resuelto

Encuentre el valor exacto de las siguientes expresiones:

① $\text{sen}(\text{sen}^{-1} \frac{1}{2})$

② $\text{sen}^{-1}(\text{sen} \frac{\pi}{4})$

③ $\text{sen}^{-1}(\text{sen} \frac{2\pi}{3})$

① $\text{sen}(\text{sen}^{-1} \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ porque $\frac{1}{2} \in [-1, 1] = \text{Dom}(\text{arcsen})$.

② $\text{sen}^{-1}(\text{sen} \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$, porque $\frac{\pi}{4} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] = \text{Dom}(f)$, siendo f la función seno restringida.

③ $\text{sen}^{-1}(\text{sen} \frac{2\pi}{3}) \neq \frac{2\pi}{3}$ porque $\frac{2\pi}{3} \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] = \text{Dom}(f)$, siendo f la función seno restringida. Pero sabemos que $\text{sen} \frac{2\pi}{3} = \text{sen} \frac{\pi}{3}$, por tanto podemos re-escribir la expresión así:

$$\text{sen}^{-1} \left(\text{sen} \frac{2\pi}{3} \right) = \text{sen}^{-1} \left(\text{sen} \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\pi}{3}$$

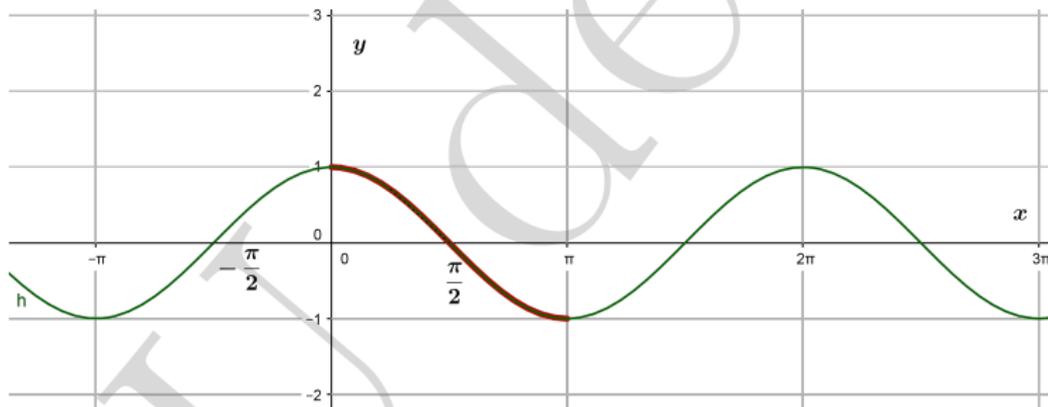
ya que

$$\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right].$$

Función Arccoseno o Coseno Inverso

Función coseno

La función coseno no es biyectiva. Si restringimos su dominio a $[0, \pi]$ obtenemos una función biyectiva.



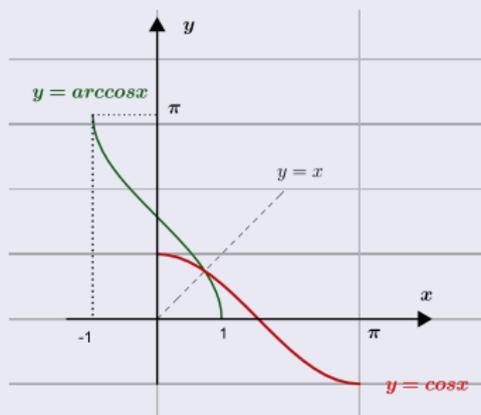
Función Arcoseno o Coseno Inverso

La función coseno inverso, denotada por \cos^{-1} , se define como

$$y = \cos^{-1} x, \text{ si y sólo si, } x = \cos y$$

para

$$-1 \leq x \leq 1 \quad \text{y} \quad 0 \leq y \leq \pi$$



Función Coseno Inverso

- El dominio de la función coseno inverso es: $[-1, 1]$
- El rango o imagen de la función coseno inverso es : $[0, \pi]$

Propiedades

- $\cos(\cos^{-1} x) = x$, si $-1 \leq x \leq 1$
- $\cos^{-1}(\cos y) = y$, si $0 \leq y \leq \pi$

Observación

La función coseno inverso (que es la función inversa de la función coseno restringida) también se denomina **función arccoseno** y la notación $\arccos(x)$ se puede usar en lugar de $\cos^{-1}(x)$

Ejemplos

- 1 $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^\circ$ porque $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $45^\circ = \frac{\pi}{4} \in [0, \pi]$.
- 2 Para determinar el valor de $\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, notemos que $\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y dado que $\alpha \in [0, \pi]$ y coseno es negativo para ángulos en el segundo y tercer cuadrante, entonces α está en el cuadrante II, así $\alpha_R = 30^\circ$ y por tanto $\alpha = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$, es decir

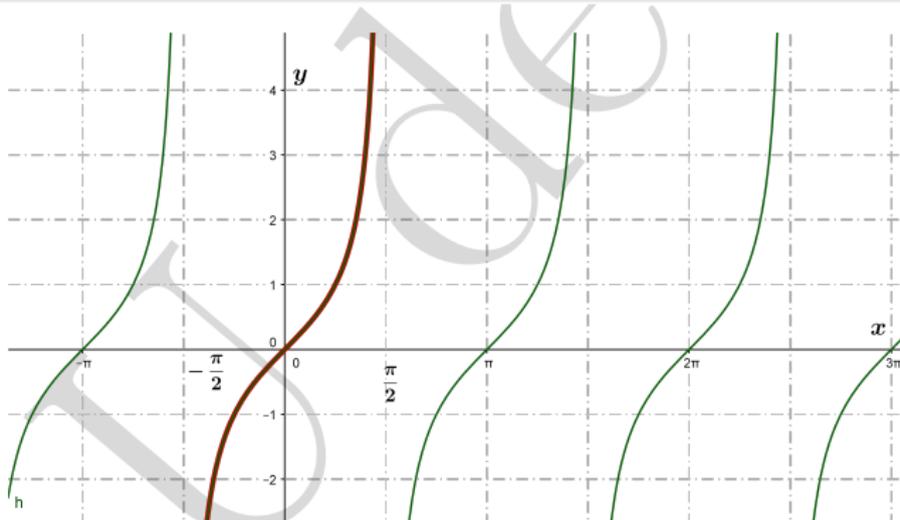
$$\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 150^\circ$$

- 3 $\cos(\cos^{-1}(-\frac{1}{2})) = -\frac{1}{2}$, porque $-\frac{1}{2} \in [-1, 1]$.
- 4 $\cos^{-1}(\cos \frac{2\pi}{3}) = \frac{2\pi}{3}$, porque $\frac{2\pi}{3} \in [0, \pi]$.
- 5 $\cos^{-1}(\cos \frac{4\pi}{3}) = \cos^{-1}(\cos \frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3}$, ya que $\frac{\pi}{3} \in [0, \pi]$ y $\cos \frac{4\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3}$, aunque $\frac{4\pi}{3} \notin [0, \pi]$.

Función Arctangente o Tangente Inversa

Función Tangente

La función tangente no es biyectiva. Si restringimos el dominio a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ obtenemos una función biyectiva.



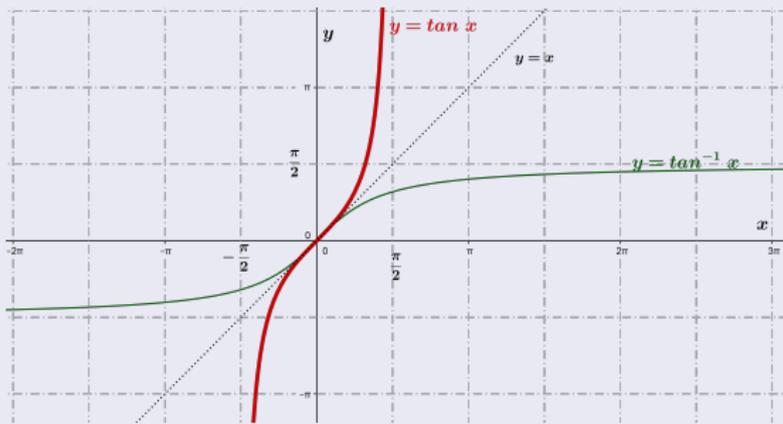
Función Arctangete o Tangente Inverso

La función tangente inversa, denotada por \tan^{-1} , se define como

$$y = \tan^{-1} x, \quad \text{si y sólo si,} \quad x = \tan y$$

para

$$x \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$



Función Tangente Inversa

- El dominio de la función tangente inversa es: \mathbb{R}
- El rango o imagen de la función tangente inversa es : $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Propiedades

- $\tan(\tan^{-1} x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
- $\tan^{-1}(\tan y) = y$, si $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

Observación

La función tangente inversa también se denomina **función arctangente** y la notación $\arctan(x)$ se puede usar en lugar de $\tan^{-1}(x)$

Ejemplos

- 1 $\tan(\tan^{-1}(200)) = 200$.
- 2 $\tan^{-1}(\tan \frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{6}$, porque $\frac{\pi}{6} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
- 3 $\tan^{-1}(\tan(-\frac{\pi}{4})) = -\frac{\pi}{4}$, porque $-\frac{\pi}{4} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
- 4 $\tan^{-1}(\tan \pi) = \tan^{-1}(\tan 0) = 0$, porque $0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y $\tan \pi = \tan 0$.

No confundir funciones trigonométricas inversas con razones trigonométricas inversas

Advertencia

$$\operatorname{sen}^{-1} x \neq \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

$$\operatorname{cos}^{-1} x \neq \frac{1}{\operatorname{cos} x}$$

$$\operatorname{tan}^{-1} x \neq \frac{1}{\operatorname{tan} x}$$

Referencias

Sullivan, M. *Álgebra y Trigonometría*, 7^a Edición. Editorial Pearson Prentice Hall, 2006.

Swokowski, E.W. Cole, J.A. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica* 13^a Edición. Editorial Cengage Learning, 2011

Zill, D. G. Dewar, J. M. *Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica*, 3^a Edición. Editorial McGraw-Hill, 2012.