Módulo 3-Diapositiva 22
Identidades y Ecuaciones Trigonométricas

Universidad de Antioquia

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Temas

- Identidades Trigonométricas
- Ecuaciones Trigonométricas

Identidades Trigonométricas

Definición

Una **identidad trigonométrica** es una igualdad entre expresiones que contienen funciones trigonométricas y es válida para todos los valores del ángulo en los que están definidas las funciones (*y las expresiones trigonométricas involucradas*).

Ejemplo

1. $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$ se cumple para todos los $x \in \mathbb{R}$
2. $\tan^2 x = 1$ no es una identidad, pues no es válida para todo x en el dominio de la función.

Para demostrar una identidad trigonométrica, se puede transformar uno de los lados de la igualdad en el otro (en general se comienza con el más complejo) o transformar (de manera reversible) ambos lados de la igualdad en una misma expresión.

Identidades

Identidades Fundamentales

Las siguientes son identidades fundamentales, para x en el dominio de las respectivas funciones, que se derivan directamente de la definición de las funciones trigonométricas.

1. $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$
2. $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$
3. $\csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$
4. $\cot x = \dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

Identidades Pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x \qquad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

Ejercicio resuelto 1

Verifique la identidad

$$\csc x - \operatorname{sen} x = \cot x \cdot \cos x$$

utilizando las identidades fundamentales y/o las identidades pitagóricas.

$$\begin{aligned}
\cot x \cdot \cos x &= \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x \\
&= \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x} \\
&= \frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x} \\
&= \csc x - \operatorname{sen} x
\end{aligned}$$

Ejercicio resuelto 2

Verifique la identidad

$$\frac{\operatorname{sen} t}{1-\cos t} = \csc t + \cot t$$

utilizando las identidades fundamentales y/o las identidades pitagóricas.

$$\begin{aligned}
\csc t + \cot t &= \frac{1}{\operatorname{sen} t} + \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t} = \frac{1+\cos t}{\operatorname{sen} t} \\
&= \frac{1+\cos t}{\operatorname{sen} t} \cdot \frac{1-\cos t}{1-\cos t} = \frac{1-\cos^2 t}{\operatorname{sen} t(1-\cos t)} \\
&= \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\operatorname{sen} t(1-\cos t)} \\
&= \frac{\operatorname{sen} t}{(1-\cos t)}
\end{aligned}$$

Fórmulas para suma y/o resta de ángulos.

Para $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, en los cuales estén definidos las funciones, se cumple que:

Coseno de una suma y/o de ángulos

$$\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \operatorname{sen} x_1 \operatorname{sen} x_2$$

$$\cos(x_1 - x_2) = \cos x_1 \cos x_2 + \operatorname{sen} x_1 \operatorname{sen} x_2$$

Seno de una suma y/o resta de ángulos

$$\operatorname{sen}(x_1 + x_2) = \operatorname{sen} x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \operatorname{sen} x_2$$

$$\operatorname{sen}(x_1 - x_2) = \operatorname{sen} x_1 \cos x_2 - \cos x_1 \operatorname{sen} x_2$$

Tangente de una suma y/o resta de ángulos

$$\tan(x_1 + x_2) = \frac{\tan x_1 + \tan x_2}{1 - \tan x_1 \tan x_2}, \qquad \tan(x_1 - x_2) = \frac{\tan x_1 - \tan x_2}{1 + \tan x_1 \tan x_2}$$

Ejemplos

Ejemplo 1

$$
\begin{aligned}
\cos 105^\circ = \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{3\pi}{12}+\frac{4\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right) \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1-\sqrt{3}\right)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2

$$
\begin{aligned}
\tan 15^\circ = \tan(\pi/12) &= \tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1 + \left[\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]} \\
&= \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} \\
&= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} \\
&= \frac{4-2\sqrt{3}}{2} \\
&= 2-\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Fórmulas para ángulos dobles

Seno y coseno de un ángulo doble

Para todo $x \in \mathbb{R}$ en el cual las funciones estén definidas se cumple que:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x.$$

Note que las fórmulas anteriores se pueden demostrar usando las fórmulas para ángulos dobles así:

$$\begin{aligned}
\cos(2x) &= \cos(x + x) \\
&= \cos(x)\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(x) \\
&= \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(2x) &= \operatorname{sen}(x + x) \\
&= \operatorname{sen}(x)\cos(x) + \cos(x)\operatorname{sen}(x) \\
&= 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)
\end{aligned}$$

Fórmulas para mitad de ángulo

Seno y coseno de mitad de ángulo

Para todo $x \in \mathbb{R}$ en el cual las siguientes funciones estén definidas se cumple:

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\cos x\right), \qquad \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}(1-\cos x).$$

Ejemplo

De la fórmula anterior tenemos que $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos x)}$, para determinar $\operatorname{sen}(5\pi/8)$ es necesario tener en cuenta que $\frac{5\pi}{8}$ es un ángulo en el cuadrante II, por tanto $\cos(\frac{5\pi}{8}) < 0$ y así:

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) &= \cos\left(\frac{\frac{5\pi}{4}}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{5\pi}{4}\right)} = -\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\left(-\cos\frac{\pi}{4}\right)\right)} \\ &= -\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Ecuaciones Trigonométricas

Definición

Una **Ecuación trigonométrica** es una igualdad entre expresiones que contienen funciones trigonométricas y es válida sólo para determinados valores del ángulo en los que están definidas las funciones (*y las expresiones trigonométricas involucradas*).

Ejemplo 1

Las soluciones de la ecuación:

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \qquad \text{en el intervalo} \qquad [0, 2\pi)$$

son $x = \frac{\pi}{6}$ y $x = \frac{5\pi}{6}$

Las soluciones generales son:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi \qquad \text{y} \qquad x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi \qquad \text{con} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Ejemplo 2

Las soluciones de la ecuación:

$$\tan x = -1 \qquad \text{en el intervalo} \qquad [0, 2\pi)$$

son $x = \frac{3\pi}{4}$ y $x = \frac{7\pi}{4}$

Las soluciones generales están dadas por: $x = \frac{3\pi}{4} + n\pi \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{Z}$

Ejercicio resuelto 1

Encuentre las soluciones de la ecuación $\cot x + 1 = 0$ para $x \in [0, 2\pi)$.

Se quiere solucionar la ecuación $\cot x = -1$, para esto note que utilizando las identidades fundamentales se tiene que:

$$\cot x = \frac{1}{\tan(x)}, \qquad \text{con} \quad \tan(x) \neq 0$$

Por tanto se quiere solucionar la ecuación $\dfrac{1}{\tan(x)} = -1$ o equivalentemente,

$\tan x = -1$, cuyas soluciones son $x = \frac{3\pi}{4}$ y $x = \frac{7\pi}{4}$.

Ejercicio resuelto 2

Encuentre las soluciones de la ecuación $\operatorname{sen}^2 x + 4\operatorname{sen} x + 3 = 0$ para $x \in [0, 2\pi)$.

Para solucionar esta ecuación note primero que la expresión puede ser factorizada como:

$$0 = \operatorname{sen}^2 x + 4\operatorname{sen} x + 3 = (\operatorname{sen} x + 1)(\operatorname{sen} x + 3),$$

por tanto $\operatorname{sen} x + 1 = 0$ ó $\operatorname{sen} x + 3 = 0$ y entonces se deben solucionar las ecuaciones:

$$\operatorname{sen} x = -1 \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} x = -3$$

Note que la segunda ecuación no tiene solución pues $-3 \notin [-1, 1]$ (rango de la función seno), por tanto solo se debe solucionar la ecuación

$$\operatorname{sen} x = -1 \qquad \text{en} \qquad [0, 2\pi),$$

cuya única solución en el intervalo es

$$x = \frac{3\pi}{2}.$$

Ejercicio resuelto 3

Encuentre las soluciones de la ecuación $\cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ para $x \in [0, 2\pi)$.

Si se hace $u = 4x - \frac{\pi}{4}$, entonces la ecuación a solucionar es

$$\cos u = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Las soluciones a esta ecuación para $u \in [0, 2\pi)$ son $u = \frac{\pi}{4}$ y $u = \frac{7\pi}{4}$, pero dado que es x quien se debe considerar en este intervalo y no u, entonces debemos ver las soluciones generales $u = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$ y $u = \frac{7\pi}{4} + 2n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$, así:

$$4x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2n\pi \qquad \text{y} \qquad 4x - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} + 2n\pi.$$

Por tanto

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2} \qquad \text{y} \qquad x = \frac{\pi}{2} + \frac{n\pi}{2}, \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Así basta ver para cuales $n \in \mathbb{Z}$ obtenemos valores de $x \in [0, 2\pi)$, lo que muestra que las soluciones son:

$$x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}.$$

Referencias

Sullivan, M. *Álgebra y Trigonometría*, 7^a Edición. Editorial Pearson Prentice Hall, 2006.

Swokowski, E.W. Cole, J.A. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica* 13^a Edición. Editorial Cengage Learning, 2011

Zill, D. G. Dewar, J. M. *Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica*, 3^a Edición. Editorial McGraw-Hill, 2012.