Módulo 4 - Diapositiva 23
Ley de Senos y Cosenos

Universidad de Antioquia

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Temas

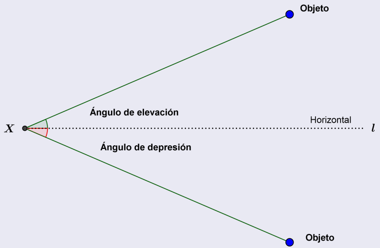
- Ley del Seno
- Ley del Coseno
- Solución de Triángulos y Aplicaciones

Ángulos de Elevación y de Depresión

La siguiente terminología es frecuentes en los ejercicios de trigonometría

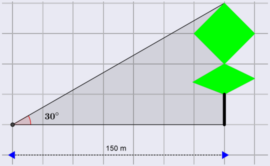
Ejemplo

Suponga que un observador en el punto X ve un objeto. El ángulo que la linea de vista forma con la horizontal l se denomina **ángulo de elevación** del objeto si el objeto está sobre la linea horizontal. En cambio, Si el objeto esta debajo de la linea horizontal l, se dirá **ángulo de depresión** del objeto.



Ejemplo

Se desea determinar la altura de un árbol que proyecta una sombra de 150 metros de longitud, si el ángulo de elevación al sol es de 30°.



Si llamamos h a la altura del arbol, entonces para solucionar el problema basta con determinar h en el triángulo rectángulo anterior. Notemos que h en el triángulo es la medida del cateto opuesto al ángulo 30° y que conocemos la medida del cateto adyacente al ángulo 30°. Por tanto solo necesitamos una razón trigonométrica que nos relacione estos dos lados, así basta tomar la función tangente para este ángulo:

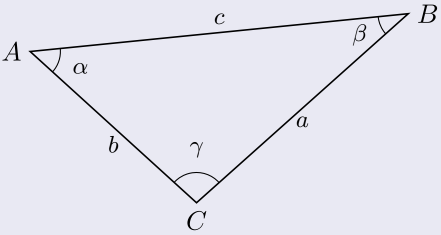
$$tan(30^\circ) = \frac{h}{150} \quad \text{luego} \quad h = 150 \cdot tan(30^\circ) = 150 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 86,6m$$

Observaciones

- Un triangulo oblicuángulo es aquel que no contiene un ángulo recto.
- La sumas de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.

Notaciones

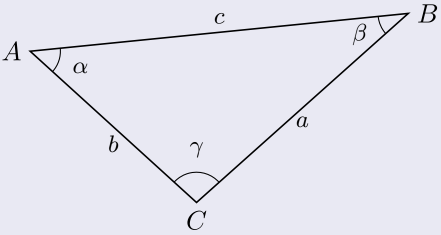
- Los vértices de un triángulo se denotarán con A, B y C
- Los ángulos en A, B y C se denotarán con α, β y γ, respectivamente y las longitudes de los lados opuestos a estos ángulos por a, b y c, respectivamente.



Ley del Seno

Teorema

Para el triángulo oblicuángulo de la figura



se satisface que:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$$

Observación

La ley del seno está formada por las siguientes tres fórmulas

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} \qquad \text{ó} \qquad \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta}$$

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} \qquad \text{ó} \qquad \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

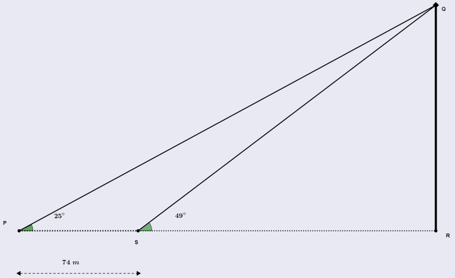
$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} \qquad \text{ó} \qquad \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

La ley del seno se usa para hallar las partes restantes de un triángulo oblicuángulo, siempre que conozcamos cualquiera de lo siguiente:

1. dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos (LLA) .
2. dos ángulos y cualquier lado (ALA o AAL).

Ejemplo 1.

Un topógrafo desea medir la altura de una torre situada en la ribera opuesta de un río sin necesidad de atravesarlo. Para tal fin, coloca un teodolito en cierto punto P, de tal manera que la horizontal coincide con el pie de la torre y mide un angulo de elevación de 25°. Camina 74 m en linea recta hacia el pie de la torre y haciendo coincidir nuevamente la horizontal con dicho pie, mide un ángulo de elevación de 49° ¿Cuál es la altura de la torre?



Tenemos que $\overline{PS} = 74m$, $\angle QPR = 25^\circ$ y $\angle QSR = 49^\circ$ y queremos averiguar el valor de $\overline{QR}$.

Notemos que en $\triangle PQS$ tenemos que $\angle QSP = 180^\circ - 49^\circ = 131^\circ$, lo que nos permite calcular

$$\angle PQS = 180^\circ - 25^\circ - 131^\circ = 24^\circ.$$

Por tanto en el triángulo PQS podemos aplicar ley de senos (caso AAL) para conocer la medida del lado $\overline{SQ}$, así

$$\frac{\overline{SQ}}{\operatorname{sen} 25^\circ} = \frac{74}{\operatorname{sen} 24^\circ} \quad \text{luego} \quad \overline{SQ} \approx 77m$$

En el triángulo rectángulo SQR podemos utilizar la función seno para el ángulo $\hat{S} = 49^\circ$ así:

$$\operatorname{sen} 49^\circ = \frac{\overline{RQ}}{77} \quad \text{luego} \quad \overline{RQ} = 77 \cdot \operatorname{sen} 49^\circ \approx 58m$$

Por tanto la altura de la torre es de aproximadamente 58 metros.

Ejemplo 2.

Se quiere solucionar un triángulo para el cual se conocen dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos (caso AAL con α opuesto a a):

$$a = 6, \qquad b = 8, \qquad \alpha = 45^\circ$$

Para hallar los otros elementos de este triángulo utilizaremos la ley del seno para determinar el ángulo β opuesto a b

$$\frac{\operatorname{sen} 45^\circ}{6} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{8} \qquad \text{así} \qquad \operatorname{sen} \beta = \frac{8 \cdot \operatorname{sen} 45^\circ}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

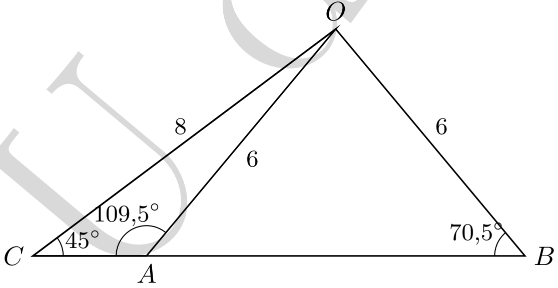
para lo cual tenemos dos posibles valores de β (la función seno es positiva en los cuadrantes I y II) que son (tomaremos aproximaciones):

$$\beta = 70{,}5^\circ \qquad \text{o} \qquad \beta = 109{,}5^\circ$$

Notemos que ambos ángulos cumplen que $\alpha + \beta < 180^\circ$ (podría ser que alguno de ellos no cumpliese esta condición). Con cada uno de estos dos valores de β podemos calcular el valor del ángulo restante γ:

- Si $\beta_1 = 70{,}5^\circ$ ($\triangle CBO$), entonces $\gamma = 180^\circ - 70{,}5^\circ - 45^\circ = 64{,}5^\circ$ y
$$\frac{c}{\operatorname{sen} 64{,}5^\circ} = \frac{6}{\operatorname{sen} 45^\circ} \quad \text{luego} \quad c = \overline{CB} = 7{,}7$$
- Si $\beta_2 = 109{,}5^\circ$ ($\triangle CAO$), entonces $\gamma = 180^\circ - 109{,}5^\circ - 45^\circ = 25{,}5^\circ$ y
$$\frac{c}{\operatorname{sen} 25{,}5^\circ} = \frac{6}{\operatorname{sen} 45^\circ} \quad \text{luego} \quad c = \overline{CA} = 3{,}7$$

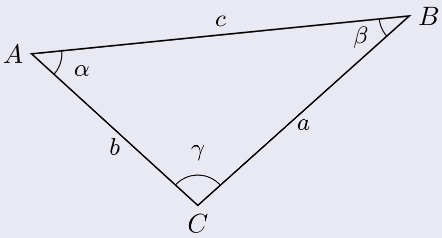
Así tenemos dos posibles triángulos que cumplen con las condiciones iniciales, que son los mostrados en la figura:



Ley del Coseno

Teorema

Para el triángulo de la figura



se satisface que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Observación

Si $\alpha = 90^\circ$, entonces $\cos\alpha = 0$ y la ley de los cosenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

se reduce a

$$a^2 = b^2 + c^2$$

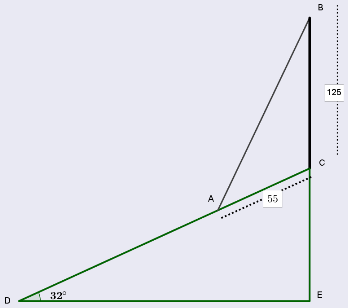
Esto demuestra que el teorema de Pitágoras es un caso especial de la ley de los cosenos.

La ley del coseno se usa para hallar las partes restantes de un triángulo oblicuángulo, siempre que conozcamos cualquiera de lo siguiente:

1. dos lados y el ángulo entre ellos (LLA).
2. tres lados (LLL).

Ejemplo

Una torre de 125 pies se localiza en la ladera de una montaña que tiene una inclinación de 32° respecto de la horizontal. Se fijará un alambre de sujeción a la parte superior de la torre y se anclará en un punto a 55 pies colina abajo de la base de la torre. Determine la longitud del alambre.



Sabemos que

$$\angle ACE = 90^\circ - 32^\circ = 58^\circ$$

por tanto

$$\angle BCA = 180^\circ - 58^\circ = 122^\circ$$

Así en el triángulo ABC podemos aplicar ley de los cosenos y conocer la medida del lado $\overline{AB}$

$$\overline{AB}^2 = 55^2 + 125^2 - 2(55)(125)\cos 122^\circ \approx 25\,936p$$

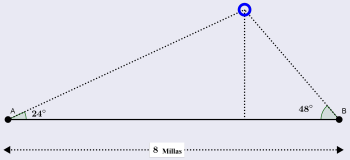
Luego

$$\overline{AB} \approx 161p$$

Por tanto la longitud del alambre es de aproximadamente 161 pies.

Ejercicio resuelto 1

Los ángulos de elevación de un globo desde dos punto A y B al nivel del suelo son de 24 y 48 grados respectivamente. Si los puntos A y B están separados por una distancia de 8 millas y el globo está entre los puntos A y B, en el mismo plano vertical, determine la altura del globo sobre el suelo.



Este problema puede ser resuelto usando la ley del seno o utilizando la razón trigonométrica tangente para los dos triángulos en que parte la altura $\overline{OP} = h$ al triángulo AOB (siendo O el punto de ubicación del globo).

- Utilizando ley del seno (ALA) en el triángulo AOB:
  El ángulo $AOB = 180^\circ - 24^\circ - 48^\circ = 108^\circ$, por tanto

$$\frac{\overline{OB}}{\operatorname{sen} 24^\circ} = \frac{8}{\operatorname{sen} 108^\circ} \quad \text{y así} \quad \overline{OB} = \frac{8 \operatorname{sen} 24^\circ}{\operatorname{sen} 108^\circ}$$

  Luego

$$\operatorname{sen}\, 48^\circ = \frac{h}{\overline{OB}} = \frac{h \operatorname{sen} 108^\circ}{8 \operatorname{sen} 24^\circ} \quad \text{y así} \quad h = \frac{8 \operatorname{sen} 24^\circ \operatorname{sen}\, 48^\circ}{\operatorname{sen} 108^\circ} \approx 2{,}5 \text{ millas}$$

- Utilizando tangente para el triángulo AOB: Si $\overline{AP} = x$ millas y $\overline{PB} = 8 - x$ millas, entonces en los triángulos AOP y POB tenemos:

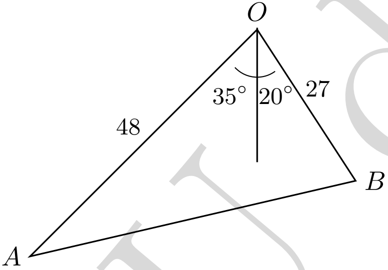
$$\tan\, 24^\circ = \frac{h}{x} \quad \text{y} \quad \tan\, 48^\circ = \frac{h}{8 - x}$$

  y despejando e igualando h obtenemos: $x \tan\, 24^\circ = (8 - x) \tan\, 48^\circ$, es decir, $x = \frac{8}{\tan\, 24^\circ + \tan\, 48^\circ}$, por tanto

$$h = x \tan 24^\circ = \frac{8 \tan\, 24^\circ}{\tan\, 24^\circ + \tan\, 48^\circ} \approx 2{,}3 \,\text{millas}$$

Ejercicio resuelto 2

Un barco sale de un puerto a la 1 p.m. y navega al S35°E a una velocidad de 24 millas por hora. Otro barco sale del mismo puerto a la 1 : 30 p.m. y navega al S20°O a 18 millas por hora. ¿Aproximadamente a qué distancia están uno del otro a las 3 : 00 p.m.?



El triángulo AOB ilustra la situación descrita, por tanto en el triángulo AOB tenemos que $\overline{OA} = 48$ millas y $\overline{OB} = 27$ millas son las distancias recorridas por cada uno de los barcos en dos horas y una hora y media respectivamente, así para obtener la distancia $\overline{AB}$ basta con aplicar la ley del coseno:

$$\begin{aligned}
\overline{AB} &= \sqrt{48^2 + 27^2 - 2(48)(27)\cos 55^\circ} \\
&\approx 39{,}3\,\text{millas}
\end{aligned}$$

Referencias

Sullivan, M. *Álgebra y Trigonometría*, 7^a Edición. Editorial Pearson Prentice Hall, 2006.

Swokowski, E.W. Cole, J.A. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica* 13^a Edición. Editorial Cengage Learning, 2011

Zill, D. G. Dewar, J. M. *Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica*, 3^a Edición. Editorial McGraw-Hill, 2012.