Módulo 4 - Diapositiva 24
Trigonometría en Complejos

Universidad de Antioquia

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Temas

- Representación geométrica y módulo de números complejos
- Forma polar de un número complejo
- Producto y cociente de números complejos
- Teorema de Moivre
- Raíces n-ésimas de números complejos

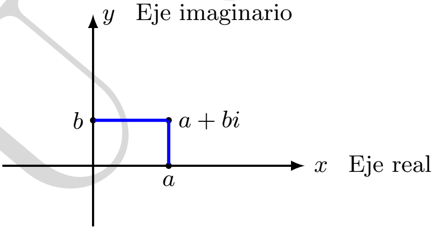
Representación geométrica

Números Complejos

Un número complejo $z = a + bi$ queda determinado de forma única por un par ordenado de números reales (a, b). La primera y segunda entrada del par ordenado corresponden a la parte real e imaginaria del número complejo, respectivamente.

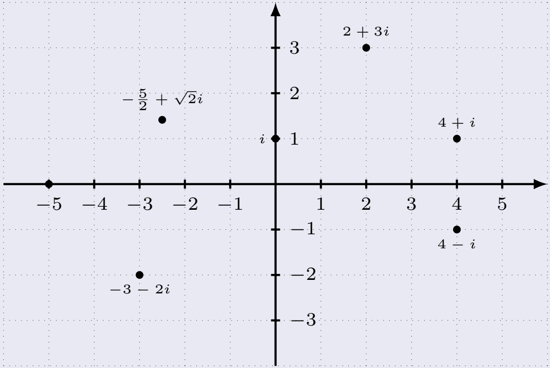
Plano Cartesiano

El eje x del plano cartesiano se denomina **eje real** y el eje y se denomina **eje imaginario**.



Ejemplo

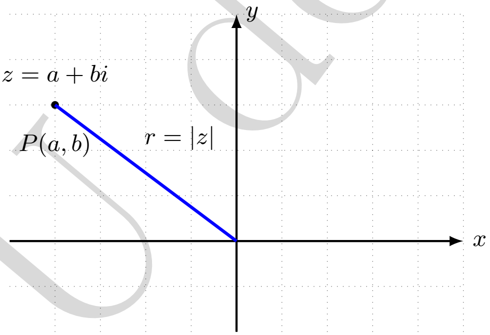
1. Al par ordenado $(-3, -2)$ le corresponde el número complejo $-3 - 2i$.
2. Al número complejo i le corresponde el par ordenado $(0, 1)$.



Módulo

Si $z = a + bi$ es un número complejo y $P(a, b)$ su par ordenado asociado, entonces la distancia de P hasta el orígen está dada por $\sqrt{a^2 + b^2}$. Esta distancia se denomina **módulo** o **magnitud** de z y se denota con $|z|$. Así

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

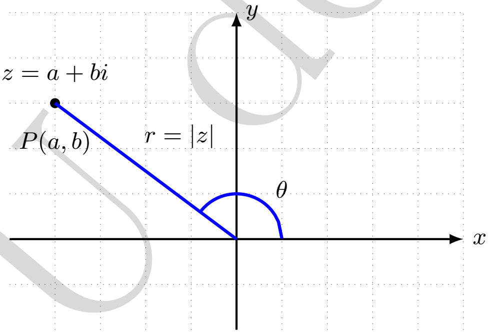


Forma Polar

Si θ es un ángulo en posición estándar cuyo lado terminal pasa por $P(a, b)$ y $r = |z|$ entonces la representación polar o trigonométrica del número complejo $z = a + bi$ viene dada por

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

El ángulo θ se conoce como el argumento de z.



Ejemplos

1. Para determinar la forma trigonométrica (o polar) del número complejo $z = -1 + \sqrt{3}\,i$ debemos determinar r y θ para z con el correspondiente $P(-1, \sqrt{3})$ (z se representa en el cuadrante II).

$$r = |z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \quad \text{y} \quad \theta = tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

   Por tanto su forma polar es:

$$z = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

2. Si la forma polar del número complejo w está dada por $w = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$, entonces su forma estandar será:

$$w = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 - \sqrt{3}\,i$$

Producto y Cociente

Teorema

Sean $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ y $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ entonces

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

y si $z_2 \neq 0$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

Ejemplo

Sean $z_1 = 4(\cos 75^\circ + i\sin 75^\circ)$ y $z_2 = \frac{1}{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$, entonces

$$z_1 z_2 = 2[\cos(75^\circ + 45^\circ) + i\sin(75^\circ + 45^\circ)] = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 + \sqrt{3}i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 8[\cos(75^\circ - 45^\circ) + i\sin(75^\circ - 45^\circ)] = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 4\sqrt{3} + 4i$$

Teorema de Moivre

Teorema de Moivre

Sea

$$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta).$$

Entonces, para todo entero n,

$$z^n = [r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

Observación

Usaremos el Teorema de Moivre para enteros positivos. Sin embargo, el teorema es cierto para $n = 0$ y n negativo. Notar que de las definiciones de exponente tenemos que

- Si $z \neq 0$ entonces
$$z^0 = 1$$
- Si $n > 0$ y $z \neq 0$ entonces
$$z^{-n} = \frac{1}{z^n}$$

Ejemplos

1. Si $z = \sqrt{3} + i$, entonces para determinar z^4, utilizando el teorema de Moivre tenemos que la forma polar de z es $2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, por tanto:

$$\begin{aligned} z^4 &= \left[2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^4 = 16\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= 16\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -8 + 8\sqrt{3}i \end{aligned}$$

2. Para simplificar el número $z = \frac{\left[2(\cos\frac{\pi}{16} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{16})\right]^{10}}{\left[4(\cos\frac{3\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{8})\right]^3}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} z &= \frac{2^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{16} + i\,\text{sen}\,\frac{10\pi}{16}\right)}{4^3\left(\cos\frac{9\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\frac{9\pi}{8}\right)} = \frac{2^{10}\left(\cos\frac{5\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{8}\right)}{2^6\left(\cos\frac{9\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\frac{9\pi}{8}\right)} \\ &= 2^4\left(\cos\left(\frac{5\pi}{8} - \frac{9\pi}{8}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{5\pi}{8} - \frac{9\pi}{8}\right)\right) \\ &= 2^4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -16i \end{aligned}$$

Raíces n-ésimas de números complejos

Definición(Raíz n-ésima de un número complejo)

Si z es un número complejo y n es un entero positivo, entonces un número complejo w es la raíz n-ésima de z si $w^n = z$.

Teorema (Raíces n-ésimas de números complejos)

Si $z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ es cualquier número complejo diferente de cero y si n es cualquier entero positivo, entonces z tiene exactamente n raíces n-ésimas diferentes $w_0, w_1, \cdots, w_{n-1}$. Estas raíces, para θ en radianes, son

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)\right]$$

$k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$

Observaciones

- Las raíces en el teorema anterior también se pueden calcular para θ en grados

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 360^\circ k}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta + 360^\circ k}{n}\right)\right]$$

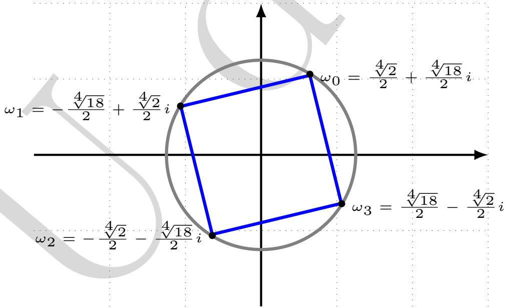
$k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$

- Las raíces n-ésimas de z en el teorema tienen todas ellas valor absoluto $\sqrt[n]{r}$, y por lo tanto sus representaciones geométricas se encuentran en una circunferencia de radio $\sqrt[n]{r}$ con centro en el origen. Además, están igualmente espaciadas en esta circunferencia dado que la diferencia en los argumentos de sucesivas raíces n-ésimas es $\frac{2\pi}{n}$ (o $\frac{360^\circ}{n}$)

Ejemplo

Las cuatro raíces cuartas de $-1-\sqrt{3}i$ son:

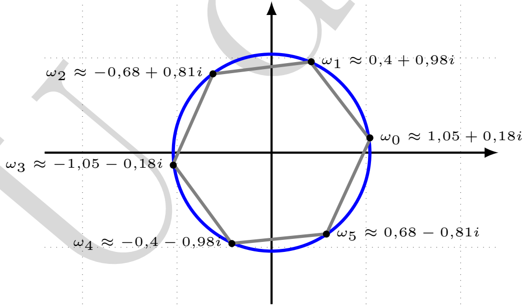
- $w_0 = \sqrt[4]{2}(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ) = \frac{\sqrt[4]{2}}{2} + \frac{\sqrt[4]{18}}{2}i$
- $w_1 = \sqrt[4]{2}(\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ) = -\frac{\sqrt[4]{18}}{2} + \frac{\sqrt[4]{2}}{2}i$
- $w_2 = \sqrt[4]{2}(\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ) = -\frac{\sqrt[4]{2}}{2} - \frac{\sqrt[4]{18}}{2}i$
- $w_3 = \sqrt[4]{2}(\cos 330^\circ + i \operatorname{sen} 330^\circ) = \frac{\sqrt[4]{18}}{2} - \frac{\sqrt[4]{2}}{2}i$



Ejercicio Resuelto

Resolver la ecuación $z^6 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i\right) = 0$ es equivalente a hallar las seis raíces sextas del número complejo $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i\right)$ cuya forma polar es $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)$, luego sus seis raíces sextas son:

$$w_0 = \sqrt[12]{2}(\cos 10^\circ + i\,\mathrm{sen}\,10^\circ), \qquad w_1 = \sqrt[12]{2}(\cos 70^\circ + i\,\mathrm{sen}\,70^\circ)$$
$$w_2 = \sqrt[12]{2}(\cos 130^\circ + i\,\mathrm{sen}\,130^\circ), \qquad w_3 = \sqrt[12]{2}(\cos 190^\circ + i\,\mathrm{sen}\,190^\circ)$$
$$w_4 = \sqrt[12]{2}(\cos 250^\circ + i\,\mathrm{sen}\,250^\circ), \qquad w_5 = \sqrt[12]{2}(\cos 310^\circ + i\,\mathrm{sen}\,310^\circ)$$



Referencias

Sullivan, M. *Álgebra y Trigonometría*, 7^a Edición. Editorial Pearson Prentice Hall, 2006.

Swokowski, E.W. Cole, J.A. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica* 13^a Edición. Editorial Cengage Learning, 2011

Zill, D. G. Dewar, J. M. *Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica*, 3^a Edición. Editorial McGraw-Hill, 2012.