Módulo 4 - Diapositiva 25
Sistemas de Ecuaciones

Universidad de Antioquia

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Temas

- Sistemas de ecuaciones
- Métodos de solución
- Sistemas de ecuaciones lineales
- Aplicaciones de los sistemas de ecuaciones

Sistemas de Ecuaciones

Sistemas de Ecuaciones

Un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones que involucra las mismas variables. Una solución de un sistema es una asignación de valores para las variables que satisface cada ecuación. Resolver un sistema significa hallar todas las soluciones del sistema.

Ejemplos

Un sistema de dos ecuaciones con dos variables

$$\begin{cases} y = & x^2 - 4 \\ y = & 2x - 1 \end{cases}$$

Un sistema de tres ecuaciones con tres variables

$$\begin{cases} x - y + z & = 2 \\ \quad xyz & = 0 \\ 2y + z & = 1 \end{cases}$$

Ejemplo

Para verificar que $(x, y, z) = (3, -1, 5)$ es una solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 - xz - y & = -5 \\ y^2 + xyz + z^2 & = 11 \\ \frac{x}{y} + zx^2 & = 42 \end{cases}$$

basta con sustituir el valor correspondiente de las tres variables en las tres ecuaciones del sistema:

$$\begin{cases} 3^2 - 3(5) - (-1) & = 9 - 15 + 1 = -5 \\ (-1)^2 + 3(-1)(5) + (5)^2 & = 1 - 15 + 25 = 11 \\ \frac{3}{-1} + (5)(3^2) & = -3 + 45 = 42 \end{cases}$$

los que conservan las igualdades, mostrando que $(x, y, z) = (3, -1, 5)$ es una solución del sistema.

Métodos de solución

De los posibles métodos de solución para una sistema de dos ecuaciones con dos incognitas, tres de los mas conocidos son el **método de sustitución, método de igualación y método de reducción**. A continuación se darán algunas directrices para aplicar el primer método.

Método de Sustitución

Directrices para solucionar un sistema de dos ecuaciones con dos variables utilizando el método de sustitución:

1. De una de las ecuaciones despeje una variable u en términos de la otra variable v.
2. Sustituya la expresión para u hallada en la directriz 1 en la otra ecuación, obteniendo una ecuación con v únicamente.
3. Encuentre las soluciones de la ecuación con v obtenida en la directriz 2.
4. Sustituya los valores v hallados en la directriz 3 en la ecuación de la directriz 1 y encuentre los correspondientes valores de u.
5. Compruebe que cada par (u, v) hallado en la directriz 4 verifique las igualdades del sistema dado.

Ejemplo 1: utilizando método de sustitución

Para resolver el siguiente sistema utilizando el método de sustitución

$$\begin{cases} x^2 + y^2 & = 36 \qquad (1) \\ x + y & = 9 \qquad (2) \end{cases}$$

Despejamos la variable x de la segunda ecuación

$$x = 9 - y$$

y la sustituimos en la primera, lo que nos deja la ecuación

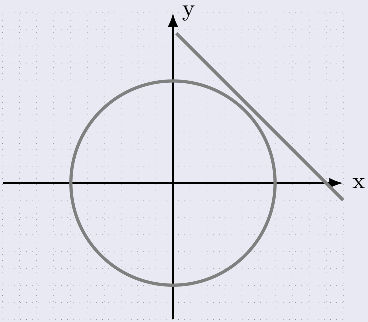
$$(9 - y)^2 + y^2 = 36$$

o equivalentemente

$$2y^2 - 18y + 45 = 0.$$

Dado que esta última ecuación no tiene soluciones en los reales, entonces decimos que el sistema no tiene solución (buscamos solo las soluciones reales).

Si graficamos las dos ecuaciones del sistema anterior, obtenemos



lo que muestra que estas dos gráficas no tienen puntos en común, por esto el sistema anterior no tiene soluciones reales.

Ejemplo 2: utilizando método de igualación

Para resolver el siguiente sistema utilizando el método de igualación

$$\begin{cases} u^2 - v = & 4 \\ 2u - v = & 1 \end{cases}$$

despejamos v en ambas ecuaciones y las igualamos obteniendo la ecuación

$$u^2 - 4 = 2u - 1$$

lo que nos lleva a la ecuación

$$u^2 - 2u - 3 = 0$$

Dado que esta ecuación tiene soluciones

$$u = -1 \quad \text{y} \quad u = 3$$

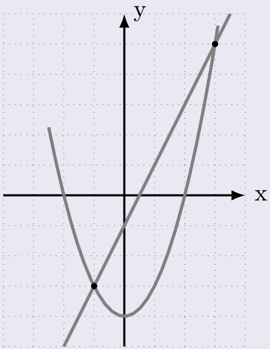
sustituimos estos dos valores en la ecuación dos, de donde

$$v = -3 \quad \text{y} \quad v = 5$$

luego el sistema tiene dos soluciones que son:

$$(u, v) = (-1, -3) \quad \text{y} \quad (u, v) = (3, 5)$$

Si graficamos las dos ecuaciones del sistema anterior, obtenemos



lo que muestra dos puntos en común, por esto el sistema anterior tiene dos soluciones reales.

Ejemplo 3: utilizando método de reducción

Para resolver el siguiente sistema utilizando el método de reducción

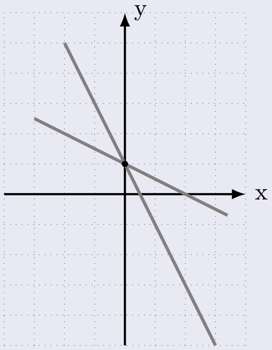
$$\begin{cases} 2x + y = 1 & ① \\ x + 2y = 2 & ② \end{cases}$$

multiplicamos la ecuación dos por -2 y sumamos las dos ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} 2x + y & = & 1 \\ -2x - 4y & = & -4 \\ \hline -3y & = & -3 \end{array}$$

luego $y = 1$ y sustituyendo este valor en la ecuación dos obtenemos que $x = 0$, así el sistema tiene una única solución que es

$$(x, y) = (0, 1)$$



Sistemas de Ecuaciones Equivalentes

Dos sistemas de ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones.

Teorema

Dado un sistema de ecuaciones, se obtiene un sistema equivalente si

1. Se intercambian dos ecuaciones.
2. Una ecuación se multiplica o divide por una constante diferente de cero.
3. Un múltiplo constante de una ecuación se suma a otra ecuación.

Ejemplo

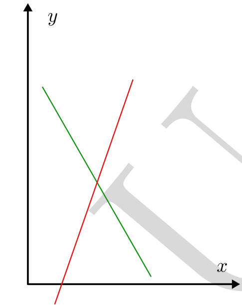
Los siguientes sistemas son equivalentes

$$\begin{cases} x - y + z &= 2 \\ \quad xyz &= 0 \\ 2y + z &= 1 \end{cases} \qquad y \qquad \begin{cases} x + y + 2z &= 3 \\ 2y + z &= 1 \\ \quad -4xyz &= 0 \end{cases}$$

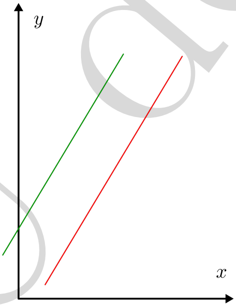
Sistemas de Ecuaciones Lineales

Caracteristica de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incognitas

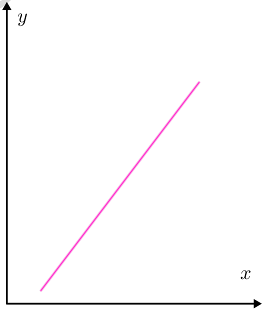
Gráficas	Número de Soluciones	Clasificación del Sistema
Rectas no paralelas	Una solución	Consistente
Rectas idénticas	Infinitas	Dependiente y consistente
Rectas paralelas	Sin solución	Inconsistente



Rectas no paralelas



Rectas paralelas



Rectas idénticas

Ejemplo 4: Rectas no paralelas - Una única solución

Para solucionar el sistema utilizaremos el método de reducción

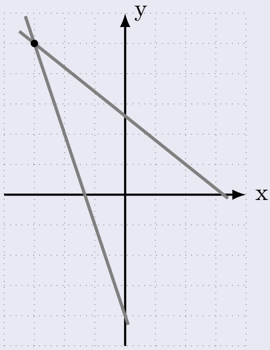
$$\begin{cases} 4x + 5y &= 13 \quad ① \\ 3x + y &= -4 \quad ② \end{cases}$$

multiplicamos la ecuación dos por -5 y sumamos las dos ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} 4x + 5y & = & 13 \\ -15x - 5y & = & 20 \\ \hline -11x & = & 33 \end{array}$$

luego $x = -3$ y sustituyendo este valor en la ecuación dos obtenemos que $y = 5$, así el sistema tiene una única solución que es

$$(x, y) = (-3, 5)$$



Ejemplo 5: Rectas coincidentes - Infinitas soluciones

Resolveremos el siguiente sistema utilizando el método de sustitución

$$\begin{cases} x - 5y &= 2 \qquad ① \\ 3x - 15y &= 6 \qquad ② \end{cases}$$

para esto despejamos x en la ecuación uno y obtenemos

$$x = 2 + 5y$$

que sustituyendo en la ecuación dos nos lleva a

$$6 + 15y - 15y = 6$$

es decir a la identidad

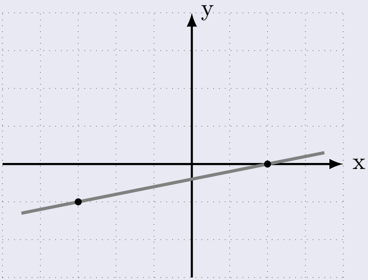
$$6 = 6$$

Lo que nos muestra que este sistema tiene infinitas soluciones y por tanto las rectas son coincidentes.

Por ejemplo si en la ecuación uno $x = 2$, entonces $y = 0$ y si $x = -3$, entonces $y = -1$, así los puntos

$$(2, 0) \;\; \text{y} \;\; (-3, -1)$$

pertenecen a la recta



Ejemplo 6: Rectas paralelas diferentes - Sin soluciones reales

Resolveremos el siguiente sistema utilizando el método de igualación

$$\begin{cases} 2x + y &= 4 \\ -4x - 2y &= 4 \end{cases}$$

para ellos despejamos y en ambas ecuaciones obteniendo

$$y = -2x + 4 \text{ y } y = -2x - 2$$

e igualando obtenemos

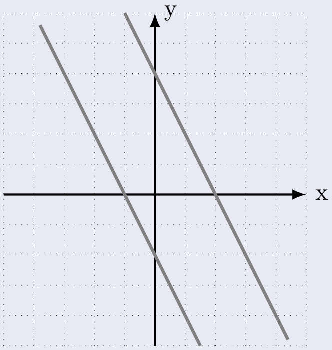
$$-2x + 4 = -2x - 2$$

es decir

$$4 = -2$$

lo que nos da una inconsistencia.

Esto muestra que el sistema no tiene soluciones y por tanto las rectas son paralelas



Ejercicios resueltos y aplicaciones

- Resuelva el siguiente sistema $\begin{cases} x - y + z &= 2 \quad ① \\ xyz &= 0 \quad ② \\ 2y + z &= 1 \quad ③ \end{cases}$

Si despejamos z en las ecuaciones uno y tres obtenemos $z = y - x + 2$ y $z = -2y + 1$ que igualando nos lleva a

$$y - x + 2 = -2y + 1 \text{ es decir, } x = 3y + 1$$

sustituyendo esta última igualdad en dos obtenemos y utilizando el z despejado de tres llegamos a

$$(3y + 1)yz = (3y + 1)y(-2y + 1) = 0$$

cuyas soluciones son: $y = 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$. Si sustituimos estos tres valores en la ecución tres y luego los valores de y y z en la ecución uno, llegamos a que el sistema tiene tres soluciones que son:

$$(x, y, z) = (1, 0, 1), \left(0, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right), \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

- Una pequeña fábrica de muebles produce sofás y sillones reclinables. Cada sofá requiere 6 horas de trabajo y 150 pesos en materiales, mientras que un sillón se puede construir por 135 pesos en 7 horas. La compañía tiene 495 horas de mano de obra disponibles cada semana y puede pagar 10575 pesos para comprar materiales. Determine la cantidad de sillones y sofás que se pueden producir.

Denotaremos por x la cantidad de sofas y por y la cantidad de sillones que se pueden producir, con estas dos variables palnteamos dos ecuaciones, una que involucra la cantidad de horas para la producción de los muebles

$$6x + 7y = 495$$

y otra que involucra los costos de los muebles

$$150x + 135y = 10575$$

con lo cual obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incognitas que nos modela este problema, cuya solución es: $x = 30$ y $y = 45$, es decir que se pueden producir 30 sofás y 45 sillones con ese tiempo y dinero disponible.

- Resuelva el siguiente sistema $\begin{cases} 4\cdot 2^x - 3^{y+1} &= 6 \\ 8\cdot 2^{x-2} + 3^y &= 8 \end{cases}$

Notemos que el sistema anterior se puede reescribir como

$$\begin{cases} 4\cdot 2^x - 3\cdot 3^y &= 6 \\ 8\cdot 2^{-2}\cdot 2^x + 3^y &= 8 \end{cases}$$

por tanto si realizamos el cambio de variables

$$u = 2^x \quad \text{y} \quad v = 3^y$$

obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 4u - 3v &= 6 \\ 2u + v &= 8 \end{cases}$$

cuyas soluciones son: $u = 3$ y $v = 2$. Así $2^x = 3$ y $3^y = 2$, por tanto el sistema tiene solución:

$$(x, y) = (\log_2 3, \log_3 2)$$

- Encuentre los valores de b tales que el sistema tenga: una solución, dos soluciones ó ninguna solución. Interprete gráficamente.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 & = 2 \qquad (1) \\ y & = x + b \qquad (2) \end{cases}$$

Si sustituimos y de la ecuación dos en la ecuación uno obtenemos la ecuación

$$x^2 + (x + b)^2 = 2$$

es decir

$$2x^2 + 2bx + (b^2 - 2) = 0$$

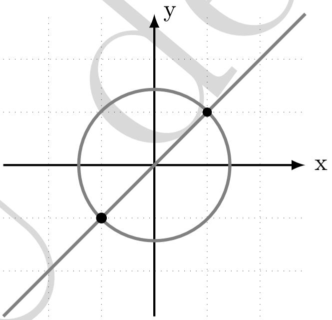
que tiene discriminante

$$\begin{aligned} \triangle &= (2b)^2 - 4(2)(b^2 - 2) \\ &= -4b^2 + 16 \end{aligned}$$

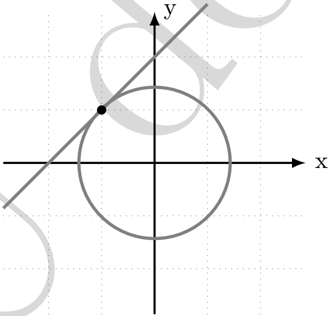
lo que nos lleva al análisis de tres casos:

- Si $\triangle > 0$, entonces la ecuación tendrá dos soluciones reales, es decir x tomará dos valores reales, lo que nos lleva a que el sistema tenga dos soluciones.

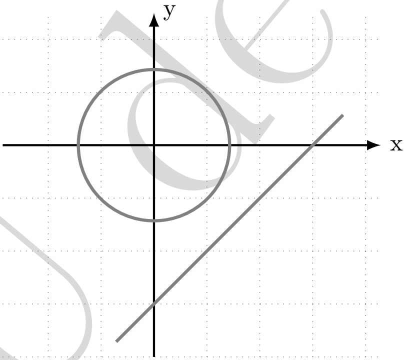
  Ya que $-4b^2 + 16 > 0$ si $b \in (-2, 2)$, entonces la recta de la ecuación dos interceptará a la circunferencia de la ecuación uno en dos puntos cuando b tome valores en el intervalo indicado. Por ejemplo si $b = 0$ tenemos:



- Si $\triangle = 0$, entonces la ecuación tendrá una única solución real, es decir x tomará un único valor real, lo que nos lleva a que el sistema tenga una única solución.
  Ya que $-4b^2 + 16 = 0$ si $b \in \{-2, 2\}$, entonces la recta de la ecuación dos interceptará a la circunferencia de la ecuación uno en un único puntos cuando b tome el valor de 2 o de -2. Por ejemplo si $b = 2$ tenemos:



- Si $\triangle < 0$, entonces la ecuación no tendrá soluciones reales, lo que nos lleva a que el sistema no tenga soluciones.
  Ya que $-4b^2 + 16 < 0$ si $b \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$, entonces la recta de la ecuación dos no interceptará a la circunferencia de la ecuación uno.
  Por ejemplo si $b = -3$ tenemos:



Referencias

Sullivan, M. *Álgebra y Trigonometría*, 7^a Edición. Editorial Pearson Prentice Hall, 2006.

Swokowski, E.W. Cole, J.A. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica* 13^a Edición. Editorial Cengage Learning, 2011

Zill, D. G. Dewar, J. M. *Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica*, 3^a Edición. Editorial McGraw-Hill, 2012.