

Módulo 4 - Diapositiva 26

Secciones Cónicas

Universidad de Antioquia

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Temas

- La Circunferencia
- La Parábola
- La Elipse
- La Hipérbola

Secciones Cónicas

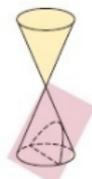
Las secciones cónicas, también llamadas cónicas, pueden obtenerse al cortar con un plano un cono circular recto de doble rama. Al variar la posición del plano, obtenemos una circunferencia, una elipse, una parábola, o una hipérbola.



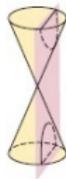
Circunferencia



Elipse



Parábola



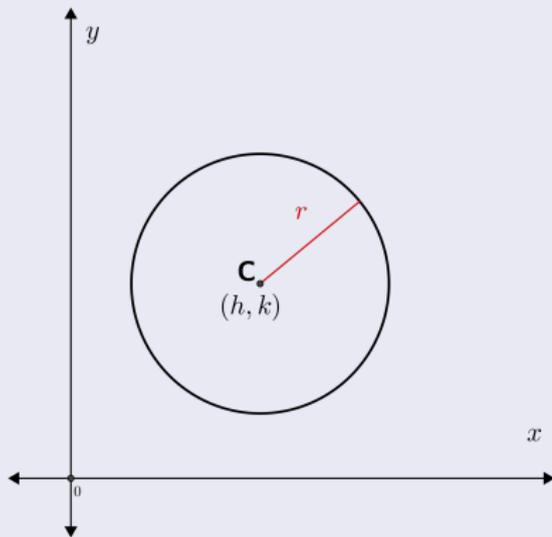
Hipérbola

Cónicas Degeneradas

Se obtienen cónicas degeneradas si el plano corta el cono en sólo un punto o a lo largo de una o dos rectas que se encuentren en el cono.

La Circunferencia

Una circunferencia es el conjunto de todos los puntos de un plano cuya distancia a un punto fijo C (centro) es r .



Ecuación de una circunferencia

La **forma estandar** de la ecuación de una circunferencia con centro (h, k) y radio r es

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

La **forma general** de la ecuación de una circunferencia es

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

Ejemplo

Para determinar el centro y el radio de la circunferencia con ecuación general dada por

$$x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$$

reescribimos la ecuación en la forma estandar, para lo cual completamos cuadrados en el caso de la variable x así:

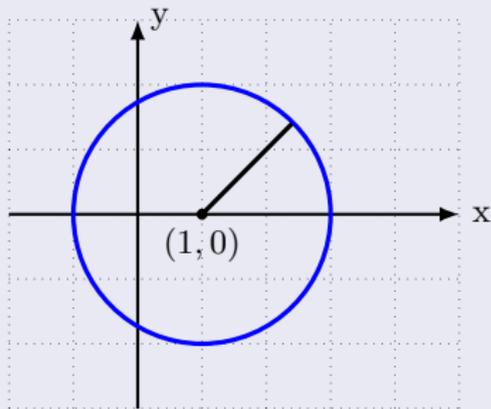
$$x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x^2 - 2x + 1) + y^2 + (-3 - 1) = 0$$

$$(x - 1)^2 + y^2 = 4$$

lo que muestra que la ecuación

corresponde a una circunferencia con centro $(h, k) = (1, 0)$ y radio $r = 2$, cuya gráfica es:



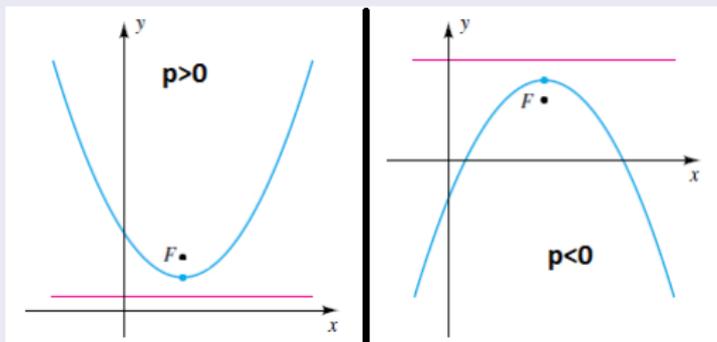
Ecuación de la Parábola

Eje Focal paralelo al eje y

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

o $y = ax^2 + bx + c$, donde

- ① $p = \frac{1}{4a}$. Vértice (h, k)
- ② Directriz: $y = k - p$
- ③ Foco $F(h, k + p)$
- ④ Longitud del Lado recto $4|p|$

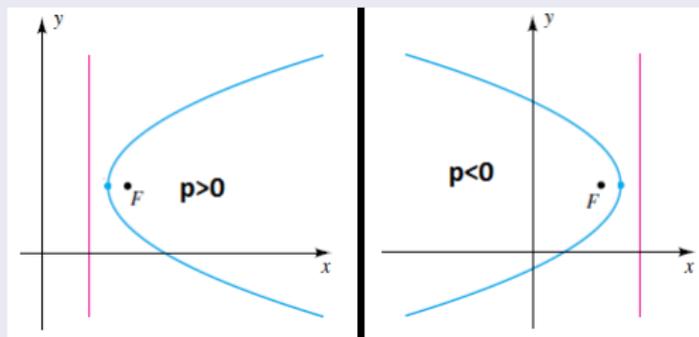


Eje focal paralelo al eje x

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

o $x = ay^2 + by + c$, donde

- ❶ $p = \frac{1}{4a}$. Vértice (h, k)
- ❸ Directriz: $x = h - p$
- ❷ Foco $F(h + p, k)$
- ❹ Longitud del Lado recto $4|p|$



Ejercicios resueltos

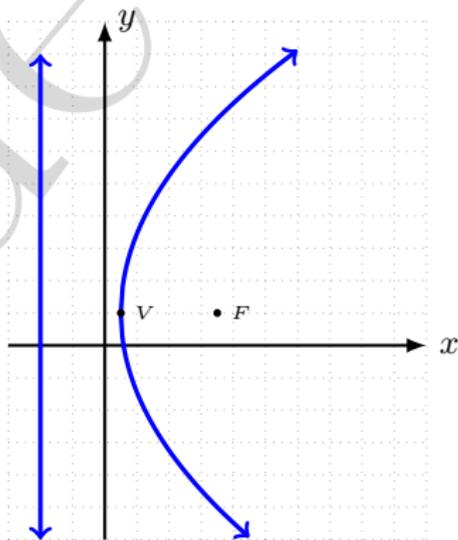
Ejercicio 1.

- Determine que representa la ecuación $y^2 - 12x - 2y + 7 = 0$

Notemos que la ecuación $y^2 - 12x - 2y + 7 = 0$ se puede reescribir (completando cuadrados en y) como

$$(y - 1)^2 = 12 \left(x - \frac{1}{2} \right)$$

que es la ecuación de una parábola con eje focal paralelo al eje x , con $p = 3$, vértice $V = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, foco $F = \left(\frac{7}{2}, 1\right)$ y recta directriz $x = -2$.

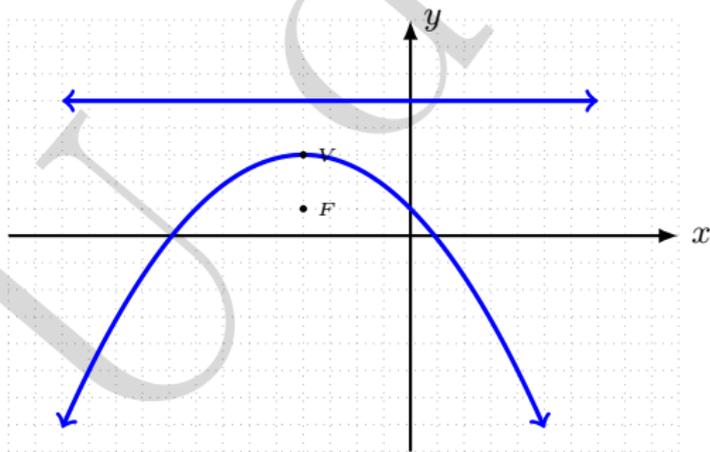


Ejercicio 2.

- Hallar la ecuación de la parábola con vértice $V = (-4, 3)$ y foco $F = (-4, 1)$

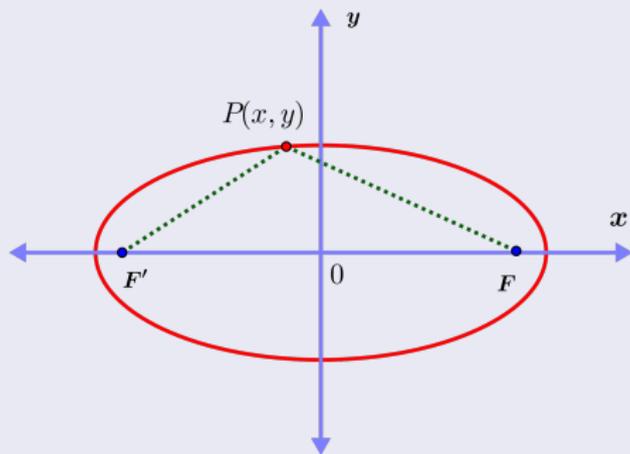
Tenemos que $V = (h, k) = (-4, 3)$ y $F = (h, k + p) = (-4, 1)$, por tanto tenemos una parábola con eje focal paralelo al eje y , con $h = -4$, $k = 3$, $p = -2$ y recta directriz con ecuación $y = 5$ cuya ecuación estandar es:

$$(x + 4)^2 = -8(y - 3)$$



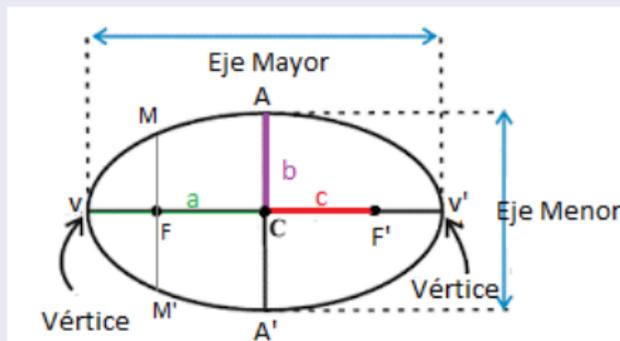
La Elipse

Una elipse es el conjunto de todos los puntos en un plano, tal que la suma de las distancias desde dos puntos fijos (los focos) en el plano es una constante positiva.



Elementos de la Elipse

- ❶ C : Centro. V, V' vértices
- ❷ Ejes Mayor y Menor VV' , AA'
- ❸ Lado Recto $\overline{MM'} = \frac{2b^2}{a}$
- ❹ Excentricidad $e = \frac{c}{a}$
- ❺ $a^2 = b^2 + c^2$. Notar que $a > c$
- ❻ Eje focal: que pasa por los focos



Eje focal paralelo al eje y

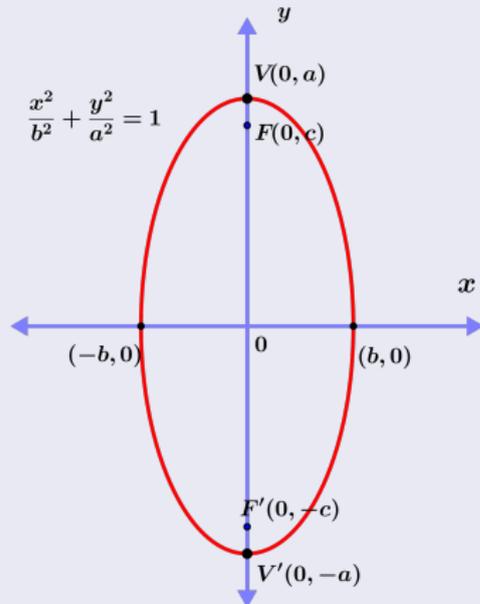
Ecuación:

$$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$$

Elementos:

- 1 $C = (h, k)$
- 2 Focos $F' = (h, k - c)$,
 $F = (h, k + c)$
- 3 Vértices $V' = (h, k - a)$,
 $V = (h, k + a)$
- 4 Eje Focal $x = h$

Ejemplo: Eje focal el eje y y centro
 $C = (0, 0)$



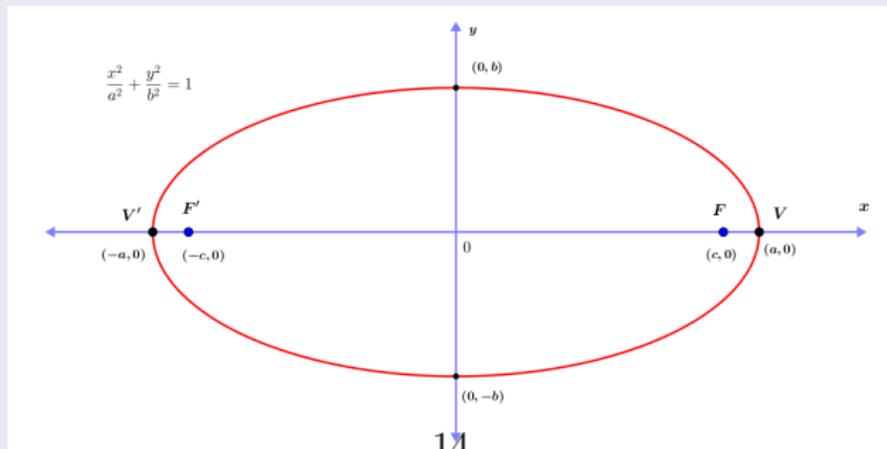
Eje focal paralelo al eje x

Ecuación y Elementos:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

- ① $C = (h, k)$, Eje Focal $y = k$
- ② Focos $F' = (h - c, k)$,
 $F = (h + c, k)$
- ③ Vértices $V' = (h - a, k)$,
 $V = (h + a, k)$

Ejemplo: Eje focal el eje x y centro $C = (0, 0)$



Ejercicio resuelto

Ejercicio 3.

- Hallar una ecuación para la elipse con centro $C = (-3, 4)$, eje mayor de longitud 8, eje menor de longitud 6 y eje mayor paralelo al eje x

Como el eje mayor es paralelo al eje x entonces la ecuación en la forma estandar de la elipse tiene la forma

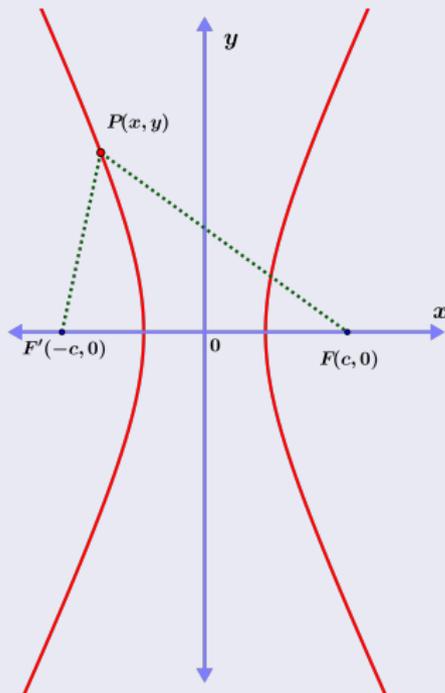
$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

con $h = -3$ y $k = 4$. Como el eje mayor tiene longitud 8, entonces $a = 4$ y como el eje menor tiene longitud 6, entonces $b = 3$ por tanto la ecuación pedida es:

$$\frac{(x + 3)^2}{16} + \frac{(y - 4)^2}{9} = 1$$

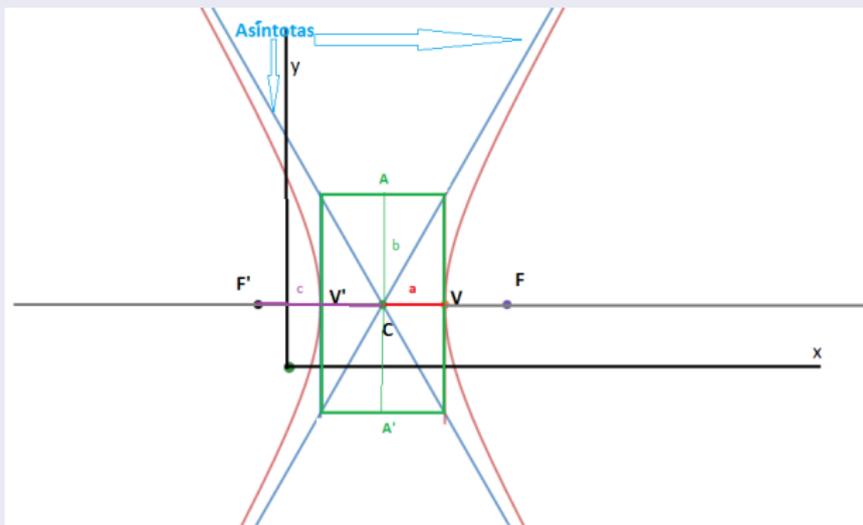
La Hipérbola

Una hipérbola es el conjunto de todos los puntos P del plano tal que el valor absoluto de la diferencia de las distancias de P a dos puntos fijos F y F' (los focos) es una constante positiva.



Elementos de la Hipérbola

- 1 Centro $C = (h, k)$.
- 2 Vértices V, V'
- 3 Eje Transverso VV'
- 4 Eje Conjugado AA'
- 5 $c^2 = a^2 + b^2$.
- 6 Eje focal: pasa por los focos



Ecuación de la Hipérbola

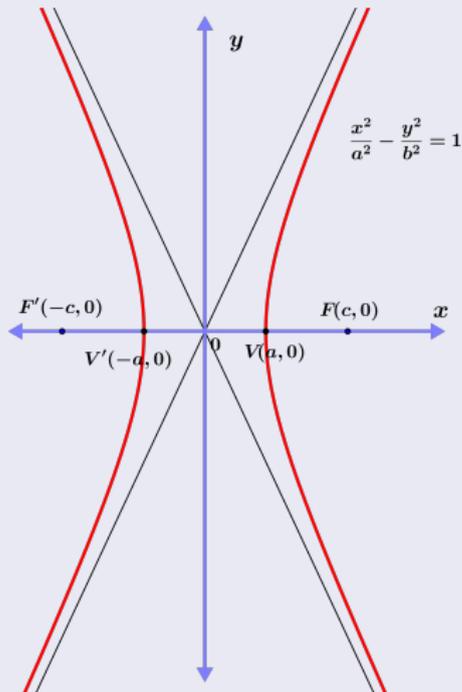
Ecuación: Eje focal paralelo al eje x

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

Las asíntotas conforman el lugar geométrico de la ecuación

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 0$$

Ejemplo: Hipérbola con centro $(0, 0)$ y eje focal el eje x



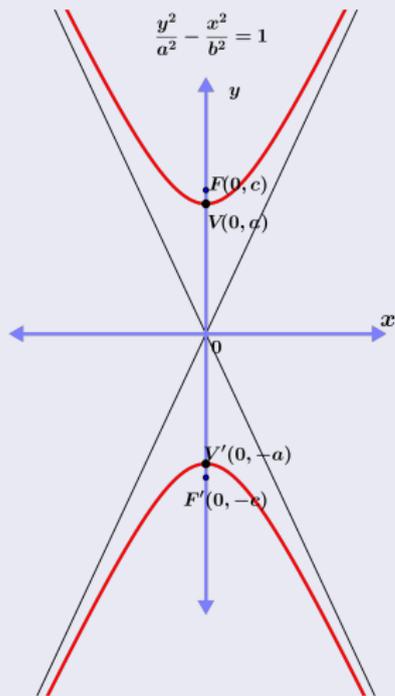
Ecuación: Eje focal paralelo al eje y

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$$

Las asíntotas conforman el lugar geométrico de la ecuación

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 0$$

Ejemplo: Hipérbola con centro $(0, 0)$ y eje focal el eje y



Ejercicio resuelto

Ejercicio 4.

Determine que lugar geométrico representa la ecuación

$$x^2 - 4y^2 + 6x + 24y - 31 = 0$$

Reescribimos la ecuación en la forma estándar, para lo cual completamos cuadrados en las variables x e y así:

$$\begin{aligned} x^2 - 4y^2 + 6x + 24y - 31 &= 0 \\ (x^2 + 6x + 9) - 4(y^2 - 6y + 9) - 31 - 9 + 36 &= 0 \\ (x + 3)^2 - 4(y - 3)^2 &= 4 \end{aligned}$$

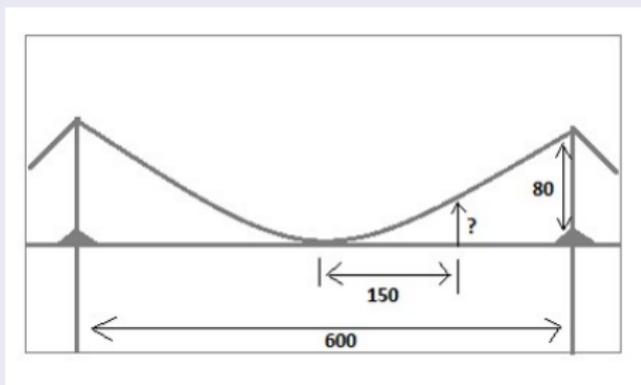
Por tanto la ecuación representa una hipérbola con ecuación estándar:

$$\frac{(x + 3)^2}{4} - \frac{(y - 3)^2}{1} = 1$$

Problemas de Aplicación

Ejercicio 5.

El cable del puente ilustrado en la figura tiene la forma de una parábola. Las torres que sostienen la estructura están separadas por una distancia de 600 pies, y tienen una altura de 80 pies. Si el cable toca la superficie del camino a la mitad de la distancia entre las torres, ¿cuál es la altura del cable en un punto situado a 150 pies del centro del puente?



Ya que el cable tiene forma de parábola podemos pensar en una parábola con vértice en el origen $(0, 0)$ y eje focal el eje y con ecuación

$$x^2 = 4py$$

Los datos del problema nos indican además que el punto $(300, 80)$ pertenece a la parábola, es decir satisface su ecuación lo que nos permite hallar el valor de p

$$300^2 = 4p(80)$$

así

$$p = \frac{300^2}{4 \cdot 80} = \frac{1125}{4}$$

y la ecuación queda

$$x^2 = 1125y$$

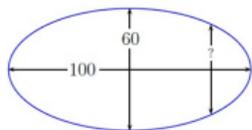
Para hallar la altura y a 150 pies del vértice basta ver que el punto $(150, y)$ satisface la ecuación, por tanto

$$y = \frac{150^2}{1125} = 20 \text{ pies}$$

Ejercicio 6.

Una pista de atletismo tiene forma de elipse, con 100 pies de largo y 60 de ancho. Determine su ancho a 10 pies del vértice.

Para solucionar el problema podemos tomar una elipse con centro en $(0, 0)$, $a = 50$ y $b = 30$ con ecuación estandar es:



$$\frac{x^2}{50^2} + \frac{y^2}{30^2} = 1$$

Como queremos determinar su ancho a 10 pies del vértice, entonces estamos a 40 pies del centro, es decir que el punto $(40, y)$ pertenece a la elipse siendo $2y$ el ancho a 10 pies del vértice, por tanto basta sustituir $x = 40$ en la ecuación para determinar y

$$y = \sqrt{\left(1 - \frac{40^2}{50^2}\right) \cdot 30^2} = 18$$

por tanto el ancho a diez pies del vértice es de aproximadamente 36 pies.

Referencias

Sullivan, M. *Álgebra y Trigonometría*, 7^a Edición. Editorial Pearson Prentice Hall, 2006.

Swokowski, E.W. Cole, J.A. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica* 13^a Edición. Editorial Cengage Learning, 2011

Zill, D. G. Dewar, J. M. *Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica*, 3^a Edición. Editorial McGraw-Hill, 2012.