Módulo 1 - Diapositiva 3
Axiomas de Orden para ($\mathbb{R}$)

Universidad de Antioquia

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Temas

- Axiomas de orden para $\mathbb{R}$
- Reales positivos y negativos. Propiedades.

Axiomas de Orden

En la recta real podemos definir de modo informal un orden en $\mathbb{R}$: Si b está a la derecha de a entonces se dice que b es mayor que a ($b > a$).

$a > b$ (a mayor que b) significa lo mismo que $b < a$ (b menor que a), por tanto todas las propiedades de $>$ tienen su equivalente para $<$

Axiomas de orden: relación mayor que ($>$)

Existe en $\mathbb{R}$ una relación $>$ tal que para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, se cumple que:

1. $a = b \quad$ ó $\quad a > b \quad$ ó $\quad b > a$ (Ley de la tricotomía)
2. Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$
3. Si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $ab > 0$
4. Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$ (Transitividad de la ralación $>$)

Determine el o los procedimientos equivocados en el siguiente argumento:

Demostración de que $0 > 2$

La siguiente tabla muestra las operaciones y su respectiva justificación para demostrar que $0 > 2$ a partir de la hipótesis de que existe un número real a que es mayor que 2:

Operación	Justificación
$a > 2$	Hipótesis
$2a > 4$	Multiplicación por 2 en ambos lados
$2a - a^2 > 4 - a^2$	Resta de a^2 en ambos lados
$a(2-a) > (2-a)(2+a)$	Factorización en ambos lados
$a > 2 + a$	Cancelación de $2 - a$ en ambos lados
$a - a > 2 + a - a$	Resta de a en ambos lados
$0 > 2$	Resultado de la operación en ambos lados

Conclusión: $0 > 2$

Reales positivos y negativos - Propiedades

Reales positivos y negativos

- Un número real a es un real positivo si $a > 0$ $(a \in \mathbb{R}^+)$ y es un real negativo si $a < 0$ $(a \in \mathbb{R}^-)$
- Sean $a, b \in \mathbb{R}$.
  - Si $a > b$, entonces $a - b > 0$
  - Si $a < b$, entonces $a - b < 0$

Propiedades

Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, se cumple que:

1. Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$
2. Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $ac < bc$
3. Si $a \neq 0$, entonces $a^2 > 0$
4. Si $a > b$ y $c > d$, entonces $a + c > b + d$

Ejemplos:

1. $-2 > -5$, porque $-2 - (-5) = 3 > 0$.
2. $-1 < 1$, porque $-1 - 1 = -2 < 0$.
3. $\frac{1}{2} > 0{,}25$, porque $\frac{1}{2} - 0{,}25 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} > 0$.
4. $\dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{4}$ y como $4 > 0$, entonces
$$2 = 4 \cdot \frac{1}{2} > 4 \cdot \frac{1}{4} = 1.$$
Sin embargo para $-2 < 0$ tenemos que
$$-1 = -2 \cdot \frac{1}{2} < -2 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}.$$
Igualmente
$$-\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \div -2 < \frac{1}{4} \div -2 = -\frac{1}{8}.$$

Observaciones:

- De la Ley de la tricotomía se tiene que todo número real es positivo, negativo o cero ($x = 0$ ó $x > 0$ ó $x < 0$).
- Si $a < b$, entonces $-b < -a$
- Si a es positivo, entonces $-a$ es negativo
- Si a es negativo, entonces $-a$ es positivo
- Si $ab > 0$, entonces se cumple solo una de las siguientes afirmaciones

$$a > 0 \text{ y } b > 0 \quad \text{ó} \quad a < 0 \text{ y } b < 0$$

- Si a y b son ambos positivos o ambos negativos, entonces ab y $\frac{a}{b}$ son positivos.
- Si a y b son uno negativo y el otro positivos, entonces ab y $\frac{a}{b}$ son negativos.

Ejemplos:

1. $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$, luego $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{4}$.
2. Como $-1 < 0$, entonces $-(-1) = 1 > 0$.
3. $\sqrt{2} > 0$ y $2 > 0$, luego $2 \cdot \sqrt{2} > 0$, $\frac{\sqrt{2}}{2} > 0$ y $\frac{1}{\sqrt{2}} > 0$.
4. $-\dfrac{1}{2} < 0$ y $-4 < 0$, entonces
$$-\frac{1}{2} \cdot -4 = 2 > 0,$$
y
$$\frac{-\frac{1}{2}}{-4} = \frac{1}{8} > 0,$$
pero
$$\frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2 < 0.$$

Ejercicio. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- Si $a > b$ y $c > d$, entonces $a - c > b - d$
- Si $a > b$ y $c > d$, entonces $ac > bd$

Relación mayor o igual ($\geq$)

- $a \geq b$, significa que a es mayor que b o que a es igual a b
- $a \leq b$, significa que a es menor que b o que a es igual a b

Relación de orden

Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$ se cumple que:

- Propiedad reflexiva: $a \leq a$
- Propiedad antisimétrica: si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$
- Propiedad transitiva: si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$

Referencias

Sullivan, M. *Álgebra y Trigonometría*, 7^a Edición. Editorial Pearson Prentice Hall, 2006.

Swokowski, E.W. Cole, J.A. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica* 13^a Edición. Editorial Cengage Learning, 2011

Zill, D. G. Dewar, J. M. *Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica*, 3^a Edición. Editorial McGraw-Hill, 2012.