Módulo 1 - Diapositiva 4
Potenciación y Radicación

Universidad de Antioquia

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Temas

- Potenciación
- Radicación

Potenciación

Sean $n \in \mathbb{Z}^+$ y $a \in \mathbb{R}$. Definimos

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{\text{n veces}}$$

Si $a \neq 0$ entonces

$$a^0 = 1 \quad \text{y} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Potenciación

Ejemplos:

- $(2)^{-3} = \frac{1}{8}$
- $(\sqrt{2})^{-4} = \frac{1}{4}$
- $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \frac{16}{9}$
- $(-3)^{4} = 81$
- $\left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \frac{1}{8}$
- $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^{0} = 1$
- $-3^{-2} - \left(\frac{-2}{3}\right)^{2} = -\frac{5}{9}$

Leyes de los exponentes

Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{Z}^+$:

1. $a^m a^n = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = a^{mn}$
3. $(ab)^n = a^n b^n$
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ $a, b \neq 0$
6. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}$, $a \neq 0$

Note que las propiedades anteriores se cumplen para cualquier par de enteros m y n, utilizando la definición de potencias para exponentes negativos y el cero, en cuyo caso a y b deben ser reales no nulos.

Ejemplos:

Leyes de los exponentes

1. $2^3 \cdot 2^2 = 2^5 = 32$

2. $(3^2)^3 = 3^6 = 6561$

3. $(6)^3 = (2 \cdot 3)^3 = 2^3 \cdot 3^3 = 216$

4. $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$ y $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$

5. $2^{-3} \cdot 2^2 = \frac{1}{2^3} \cdot 2^2 = \frac{2^2}{2^3} = 2^{2-3} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

   ó $$\frac{2^2}{2^3} = \frac{1}{2^{3-2}} = \frac{1}{2}$$

Ejemplos:

Simplificación de expresiones.

1. $$\frac{2^{-3}2^{-4}}{2^{-5}2^{-2}} = 1$$
2. $$(3u^{-1}v^{-2})^{-3} = \frac{u^3v^6}{27}$$
3. $$\frac{(3a^{-1}b^2)^{-2}}{(2a^2b^{-1})^{-3}} = \frac{8a^8}{9b^7}$$
4. $$\left[\frac{16^n \cdot 3^{8n} \cdot 10^{4n}}{2^{8n} \cdot 9^{4n} \cdot 5^{4n}}\right]^n = 1$$
5. $$\frac{x^{-1}-1}{x^{-1}+1} = \frac{1-x}{1+x}$$
6. $$\left(\frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}}\right)^{-1} = \frac{b+a}{b-a}$$
7. $$\left[\left(-\frac{x^{-2}y^0}{x^3y^{-2}}\right)^{-2}\right]^{-2} = \frac{y^8}{x^{20}}$$

Raíz n-ésima de un número real a, $\sqrt[n]{a}$

Si $n \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{R}$, entonces definimos $\sqrt[n]{a}$ como:

$$\sqrt[n]{a} = b, \quad \text{si y sólo si,} \quad b^n = a.$$

Si n es par, se debe cumplir que:

$$a \geq 0 \;\text{ y }\; b \geq 0$$

Observación:

Notemos que para n par y $a > 0$, el símbolo $\sqrt[n]{a}$ está denotando la raíz n-ésima positiva de a. Si n es par y $a < 0$, entonces $\sqrt[n]{a}$ no es un número real.

Raíz n-ésima de un número real a, $\sqrt[n]{a}$

Ejemplos

1. $\sqrt[5]{32} = 2$, porque $2^5 = 32$.
2. $\sqrt[3]{-8} = -2$, porque $(-2)^3 = -8$.
3. $\sqrt{9} = 3$, porque $3^2 = 9$ y $9 > 0$.
4. $\sqrt{-9}$ no es un número real.

El símbolo $\sqrt{}$ se utiliza para designar la raíz cuadrada no negativa.

Propiedades de $\sqrt[n]{a}$, con $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$

- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, si $\sqrt[n]{a}$ es un número real
- $\sqrt[n]{a^n} = a$, si $a \geq 0$
- $\sqrt[n]{a^n} = a$, si $a < 0$ y n es impar
- $\sqrt[n]{a^n} = |a|$, si $a < 0$ y n es par

Alerta

Afirmar que $\sqrt{x^2} = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ es falso.

Ejemplos:

1. $\left(\sqrt[4]{32}\right)^4 = 32$, ya que $\sqrt[4]{32}$ es un número real
2. $\sqrt[4]{3^4} = 3$, ya que $3 \geq 0$
3. $\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$, ya que $-5 < 0$ y 3 es impar
4. $\sqrt[4]{(-5)^4} = |-5| = 5$, ya que $-5 < 0$ y 4 es par
5. $\sqrt{(-2)^2} \neq -2$, ya que $-2 < 0$ pero 2 es par

Algunas leyes de la radicación:

Para $a, b \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{N}$, y siempre que todas las raíces sean números reales:

- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, con $b \neq 0$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Ejemplos:

1. $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

2. $\sqrt{50} = \sqrt{(-25) \cdot (-2)} \neq \sqrt{-25} \cdot \sqrt{-2}$

   porque $\sqrt{-25}$ y $\sqrt{-2}$ no son números reales

3. $\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}} = \dfrac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \dfrac{2}{3}$

4. $\sqrt[3]{\sqrt{729}} = \sqrt[6]{729} = 3$

Exponentes racionales

Sean $m, n \in \mathbb{N}$, con $n > 1$. Si a es un número real tal que $\sqrt[n]{a}$ existe (es un número real), entonces:

1. $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$
2. $a^{m/n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
3. $a^{-m/n} = \dfrac{1}{a^{m/n}}$, con $a \neq 0$

Ejemplos:

1. $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$

2. $2^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{2^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

3. $8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$ ó $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

4. $8^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{8^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{4}$

5. $(-8)^{\frac{3}{2}} \neq (\sqrt{-8})^3$ y $(-8)^{\frac{3}{2}} \neq \sqrt{(-8)^3}$

   porque $\sqrt{-8} \notin \mathbb{R}$ y $\sqrt{(-8)^3} \notin \mathbb{R}$

Ejemplos

Simplificación de expresiones radicales:

1. $\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{4096}}}}} = 2$
2. $\sqrt[3]{m^6 n^3 p^{12}} = m^2 n p^4$
3. $\sqrt[5]{-32 p^{20} q^{10} r^5} = -2p^4 q^2 r$
4. $\dfrac{\sqrt[3]{8x^3 y^8 z^4}}{\sqrt{36 y^4 z^3}} = \frac{1}{3} x \sqrt[6]{\frac{y^4}{z}}$
5. $\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{h^2 t}}{h^2 z^2 t}} = \frac{1}{z} \sqrt[3]{\frac{1}{h^2 t}}$
6. $\sqrt[n]{\dfrac{6^{2n} \cdot 2^n \cdot 10^{4n}}{8^{3n} \cdot 15^{2n}}} = \dfrac{25}{4}$

Referencias

Sullivan, M. *Álgebra y Trigonometría*, 7^a Edición. Editorial Pearson Prentice Hall, 2006.

Swokowski, E.W. Cole, J.A. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica* 13^a Edición. Editorial Cengage Learning, 2011

Zill, D. G. Dewar, J. M. *Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica*, 3^a Edición. Editorial McGraw-Hill, 2012.