Módulo 1 - Diapositiva 5
Productos notables y factorización

Universidad de Antioquia

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Temas

- Factorización
- Algunos Métodos de Factorización

Factorización

La factorización es el proceso de expresar una suma de términos como un producto de dos o mas términos.

Factor común

En la expresión

$$2a^2b - 8ab^2 - 4ab$$

hay un factor común en los tres términos que es $2ab$, por tanto la anterior expresión se puede factorizar así:

$$2ab(a - 4b - 2)$$

En la expresión

$$2x^2y + 3y + 7x - 4$$

no hay un factor que sea común a los cuatro términos.

Factorización

Factor común por agrupación

En la expresión:

$$-4a^2n - 2abn + 2am + bm$$

no hay un factor que sea común a todos los cuatro términos, pero si los agrupamos en dos:

$$(-4a^2n - 2abn) + (2am + bm)$$

Vemos que los dos primeros términos tienen el factor común $-2an$ y que los dos últimos términos tienen el factor común m, por tanto la anterior expresión se puede reescribir así:

$$-2an(2a + b) + m(2a + b)$$

y por tanto si se saca el factor común $2a + b$ se obtien la factorización:

$$(m - 2an)(2a + b)$$

Factorización

Algunas fórmulas de factorización

Diferencia de Cuadrados

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

Trinomio Cuadrado Perfecto

$$x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2$$

Diferencia y suma de dos cubos

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

Factorización

Ejemplos

De factorización en $\mathbb{R}$:

1. $4x^2y + 2xy - 6x - 3 = (2xy - 3)(2x + 1)$
2. $x^2 - 25y^2 = (x - 5y)(x + 5y)$
3. $x^6 + 8 = (x^2 + 2)(x^4 - 2x^2 + 4)$
4. $27x^3 - 1 = (3x - 1)(9x^2 + 3x - 1)$
5. $4x^2 - 4xy + y^2 = (2x - y)^2$

Factorización de $ax^2 + bx + c$

Ejemplos

De factorización en $\mathbb{R}$:

1. $x^2 + 7x + 12 = (x + 4)(x + 3)$
2. $x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2)$
3. $6x^2 + 7x - 5 = (3x + 5)(2x - 1)$
4. $6y^2 + 11y - 21 = (x + 3)(6x - 7)$

Factorización de $x^2 + bx + c$ completando cuadrados

En ocasiones es posible factorizar un polinomio de la forma $x^2 + bx + c$ por completación de cuadrados, el objetivo es completar un trinomio cuadrado perfecto para luego utilizar la diferencia de cuadrados (cuando sea posible)

Completación de cuadrados

Para $x^2 + bx + c$ con $b \neq 0$ se tiene que

$$x^2 + bx + c = \left(x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right) + \left(c - \left(\frac{b}{2}\right)^2\right)$$

Notemos que aunque siempre es posible completar el trinomio cuadrado perfecto no siempre nos queda una diferencia de cuadrados, lo cual hace que no siempre sea posible factorizar por este método. Por ejemplo el polinomio $x^2 + 2x + 4$ no es factorizable.

Ejemplo

Para factorizar el polinomio $x^2 + 7x + 12$ procedemos así:

$$\begin{aligned}
x^2 + 7x + 12 &= \left(x^2 + 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2\right) + \left(12 - \left(\frac{7}{2}\right)^2\right) \\
&= \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \\
&= \left(x + \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{7}{2} + \frac{1}{2}\right) \\
&= (x+3)(x+4)
\end{aligned}$$

pero no podemos hacer lo mismo con el siguiente polinomio (no conseguimos la factorización)

$$x^2 + 2x + 4 = \left(x^2 + 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2\right) + \left(4 - \left(\frac{2}{2}\right)^2\right) = (x+1)^2 + 3$$

Ejemplos:

De factorización en $\mathbb{R}$:

1. $12x^3 + 2x^2 + 6x = 2x(6x^2 + x + 3)$
2. $x^4 - y^4 = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$

De racionalización:

1. $\dfrac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = -(\sqrt{2} + \sqrt{3})$
2. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}} = \frac{1}{5}(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9})$

Referencias

Sullivan, M. *Álgebra y Trigonometría*, 7^a Edición. Editorial Pearson Prentice Hall, 2006.

Swokowski, E.W. Cole, J.A. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica* 13^a Edición. Editorial Cengage Learning, 2011

Zill, D. G. Dewar, J. M. *Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica*, 3^a Edición. Editorial McGraw-Hill, 2012.