Módulo 1 - Diapositiva 7
Números Complejos

Universidad de Antioquia

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Temas

- Números complejos $\mathbb{C}$
- Axiomas de campo para $\mathbb{C}$
- Plano complejo y módulo
- Solución de ecuaciones lineales y cuadráticas en $\mathbb{C}$

Definición de Número Complejo

Un número complejo es una expresión de la forma:

$$a + bi$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$.

a : Parte Real, b : Parte Imaginaria.

$$\mathbb{C} = \left\{ a + bi : a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1 \right\}.$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Raíz cuadrada principal de -1

Para cualquier número real $r > 0$ se define la raíz cuadrada principal de $-r$ como el número complejo $\sqrt{r}i$ y se denota por $\sqrt{-r}$:

$$\sqrt{-r} = \sqrt{r}i$$

Ejemplos

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4}\,i = 2i \quad \text{y} \quad \sqrt{-7} = \sqrt{7}\,i$$

Alerta

Para $x, y \in \mathbb{R}$

afirmar que $\sqrt{x}\sqrt{y} = \sqrt{xy}$ con $x, y < 0$ es falso.

Suma y multiplicación de números complejos

En los números complejos se definen dos operaciones binarias: la adición (+) y la multiplicación o producto (·, ×)

Suma

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Multiplicación

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Ejemplo

- $(2 + 3i) + (7 - 5i) = (2 + 7) + (3 - 5)i = 9 - 2i$
- $(2 + 3i) \cdot (7 - 5i) = [2 \cdot 7 - 3 \cdot (-5)] + [2 \cdot (-5) + 3 \cdot 7]i = 29 + 11i$

Axiomas de Campo

Igual que los reales, los complejos también son un campo.

Los números complejos son cerrados respecto a la operación adición(+)

1. A cada par de números complejos z y w le corresponde un único número complejo $z + w$.

Los números complejos son cerrados respecto a la operación multiplicación $(\cdot)$

1. A cada par de números complejos z y w le corresponde un único número complejo $z \cdot w$.

Ejemplo:

1. $(3+2i)+(7-4i) = 10-2i \in \mathbb{C}$
2. $(3+2i)\cdot(7-4i) = 29+2i \in \mathbb{C}$

Propiedades de los números complejos

Propiedades de la suma o adición

1. La adición es conmutativa: $z + w = w + z$
2. La adición es asociativa: $z + (v + w) = (z + v) + w$
3. $\mathbf{0}$ es el neutro aditivo: $z + \mathbf{0} = z$
4. $-z$ es el inverso aditivo o negativo de z: $z + (-z) = \mathbf{0}$

En la propiedad tres, $\mathbf{0} = 0 + 0i = 0 \in \mathbb{R}$

En la propiedad cuatro, si $z = a + bi$, entonces $-z = -a - bi$

Ejemplo:

1. $(1 + 2i) + (0 + 0i) = (1 + 0) + (2 + 0)i = 1 + 2i$
2. $(1 + 2i) + (-1 - 2i) = (1 - 1) + (2 - 2)i = 0 + 0i = \mathbf{0}$

Propiedades de los números complejos

Propiedades de la multiplicación

1. La multiplicación es conmutativa: $zw = wz$
2. La multiplicación es asociativa: $v(wz) = (vw)z$
3. $\mathbf{1}$ es el neutro multiplicativo: $z \cdot \mathbf{1} = a$
4. $\dfrac{1}{z} = z^{-1}$ es el inverso multiplicativo (recíproco) de z: $z \cdot \left(\dfrac{1}{z}\right) = \mathbf{1}$, si $z \neq 0$,

En la propiedad tres, $\mathbf{1} = 1 + 0i = 1 \in \mathbb{R}$

En la propiedad cuatro, si $z = a + bi$, entonces quién es $z^{-1} = ?$ (en su forma estandar).

Relación entre adición y multiplicación

1. La multiplicación es distributiva sobre la adición:

$$v(w+z) = vw + vz \quad \text{y} \quad (v+w)z = vz + wz$$

Las once propiedades anteriores: cinco para la suma, cinco para el producto y una que relaciona la suma con el producto son los axiomas de campo que cumplen los números complejos, por esto se dice que $\mathbb{C}$ es un campo o se habla del campo de los números complejos.

Ejemplo:

1. $(1+0i)\cdot(2+3i) = (1\cdot 2 - 0\cdot 3) + (1\cdot 3 + 0\cdot 2)i = 2+3i$
2. $(1+2i)\cdot\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i\right) = \left(\frac{1}{5} + \frac{4}{5}\right) + \left(-\frac{2}{5} + \frac{2}{5}\right)i = 1 + 0i = \mathbf{1}$

Conjugado de un Número Complejo

El conjugado de un número complejo $z = a + bi$ denotado $\bar{z}$, es el número complejo $a - bi$. Es decir: $\bar{z} = a - bi$

Propiedades del conjugado

Si $z = a + bi$, entonces:

$$z + \bar{z} = 2a \in \mathbb{R}, \qquad z - \bar{z} = 2bi \in \mathbb{C}, \qquad z\bar{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$$

Ejemplo

Si $z = -2 - 3i$, entonces: $\bar{z} = -2 + 3i$,

$$(-2 - 3i) + (-2 + 3i) = -4, \qquad (-2 - 3i) - (-2 + 3i) = -6i$$

y

$$(-2 - 3i) \cdot (-2 + 3i) = 4 + 9 = 13$$

Inverso Multiplicativo

La última propiedad del conjugado permite encontrar el inverso multimplicativo del número complejo $z = a + bi$ cuando $z \neq 0$.

Como $z \neq 0$ y $z\bar{z} = a^2 + b^2 \neq 0$, entonces

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{a^2 + b^2}$$

Es decir que la forma estandar de z^{-1} es:

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$$

Ejemplo

Si $z = -2 - 3i$, entonces: $z^{-1} = \dfrac{-2}{13} + \dfrac{3}{13} i$

Potenciación: Exponentes en los complejos

En particular, cuando se multiplica un número complejo z por sí mismo varias veces se está realizando un proceso de potenciación, para lo cual es necesario definir exponentes en los complejos

Sean $n \in \mathbb{Z}^+$ y $z \in \mathbb{C}$. Definimos

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdots z}_{\text{n veces}}$$

Si $z \neq 0$ entonces

$$z^0 = 1 \quad \text{y} \quad z^{-n} = \frac{1}{z^n}$$

Ejemplo

- $(3-2i)^2 = (3-2i)(3-2i) = 5-12i$
- $(5+2i)^0 = 1$ y $\left(\dfrac{1}{2+3i}\right)^0 = 1$

Ejemplo

- $(3-2i)^{-2} = \dfrac{1}{(3-2i)^2} = \dfrac{1}{5-12i} = \dfrac{5}{169} + \dfrac{12}{169}i$
- $\left(\dfrac{1}{3-2i}\right)^{-2} = (3-2i)^2 = 5-12i$

Leyes de los exponentes

Para todo $z, w \in \mathbb{C}$ y $m, n \in \mathbb{Z}$:

1. $z^m z^n = z^{m+n}$
2. $(z^m)^n = z^{mn}$
3. $(zw)^n = z^n w^n$
4. $\left(\dfrac{z}{w}\right)^n = \dfrac{z^n}{w^n}$, $w \neq 0$
5. $\left(\dfrac{z}{w}\right)^{-n} = \left(\dfrac{w}{z}\right)^n$

   para $z, w \neq 0$
6. $\dfrac{z^m}{z^n} = z^{m-n} = \dfrac{1}{z^{n-m}}$,

   para $z \neq 0$

Ejemplos

1. $(1+i)^3(1+i)^2 = (1+i)^5$

2. $(1+i)^5 = (1+i)(1+i)^2(1+i)^2 = (1+i)(2i)(2i) = -4-4i$

3. $(3-2i)^4 = [(3-2i)^2]^2 = (5-12i)^2 = -119-120i$

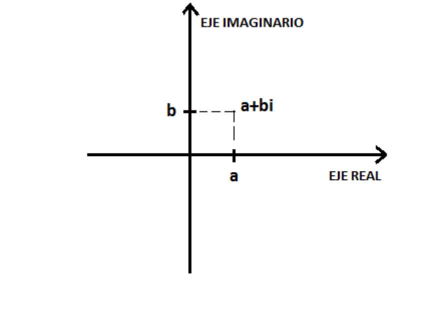
4. $[(2-i)(3+i)]^2 = (2-i)^2(3+i)^2 = (3-4i)(8+6i) = 48-14i$

5. $\left(\dfrac{1+i}{-1+i}\right)^4 = \dfrac{(1+i)^4}{(-1+i)^4} = \dfrac{-4}{-4} = 1$

6. $\dfrac{(1-i)^{10}}{(1-i)^6} = (1-i)^{10-6} = (1-i)^4 = -4$

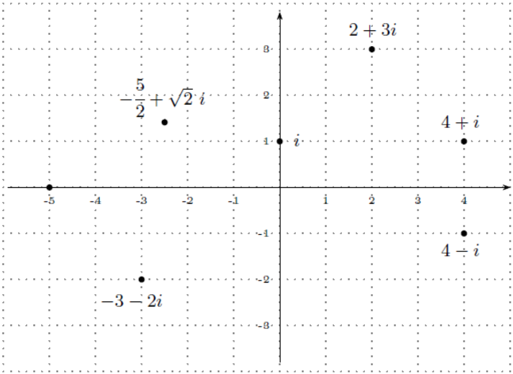
El plano complejo

Todo número complejo $z = a + bi$ puede ser representado en al plano complejo, en el cual el eje x del plano se denomina **eje real** y el eje y se denomina **eje imaginario**.



El plano complejo

Los números complejos $2 + 3i$ y $-3 - 2i$ pueden ser representado en el plano coordenado por los puntos $(2, 3)$ y $(-3, -2)$ respectivamente

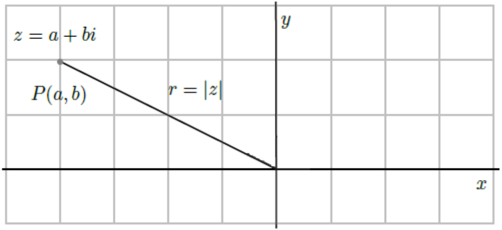


Módulo

Módulo

Si $z = a + bi$ es un número complejo y $P(a, b)$ su par ordenado asociado, entonces la distancia de P hasta el orígen está dada por $\sqrt{a^2 + b^2}$. Esta distancia se denomina **módulo** o **magnitud** de z y se denota con $|z|$. Así

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Propiedades del módulo

Para $z, w \in \mathbb{C}$:

- $|z| \geq 0$
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $z\bar{z} = |z|^2$
- $|z + w| \leq |z| + |w|$
- $|zw| = |z|\,|w|$
- $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$

  para $w \neq 0$

Ejemplos

1. $|2+i| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \in \mathbb{R}$ y es mayor que cero.
2. $|(-2+i)+(3-2i)| = |1-i| = \sqrt{2}$ y de otro lado se tiene que $|-2+i|+|3-2i| = \sqrt{5}+\sqrt{13}$.
3. $|(-2+i)\cdot(3-2i)| = |-4+7i| = \sqrt{65}$ y de otro lado se tiene que $|-2+i||3-2i| = \sqrt{5}\sqrt{13} = \sqrt{65}$.
4. $(-2+i)\cdot(-2-i) = 5 \quad$ y $\quad |-2+i|^2 = (\sqrt{5})^2 = 5$

Igualdad de números complejos

Dos números complejos son iguales si son iguales en su parte real y en su parte imaginaria. Es decir que

$$a + bi = c + di, \quad \text{si y solo si}, \quad a = c \quad \text{y} \quad b = d.$$

Para que los números complejos $3 - yi$ y $2x + 5i$ sean iguales es necesario que

$$3 = 2x \quad \text{y} \quad -y = 5,$$

es decir

$$x = \frac{3}{2} \quad \text{y} \quad y = -5$$

Ecuación Cuadrática

Discriminante

Si la ecuación cuadrática: $ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$ tiene discriminante $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones complejas conjugadas.

Ejemplo

La ecuación: $2x^2 - 3x + 2 = 0$ tiene por discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4(2)(2) = -7 < 0$$

Por tanto tiene dos soluciones complejas que son:

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{7}\, i}{4} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{7}\, i}{4}$$

Referencias

Sullivan, M. *Álgebra y Trigonometría*, 7^a Edición. Editorial Pearson Prentice Hall, 2006.

Swokowski, E.W. Cole, J.A. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica* 13^a Edición. Editorial Cengage Learning, 2011

Zill, D. G. Dewar, J. M. *Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica*, 3^a Edición. Editorial McGraw-Hill, 2012.