Módulo 2 - Diapositiva 9
Funciones y sus gráficas

Universidad de Antioquia

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Temas

- Funciones
- Funciones Polinomiales
- Gráficas de Funciones

Función

Definición de Función

Sean A y B dos conjuntos no vacios. Una función f de A en B es una correspondencia que asigna a todo elemento x del conjunto A, exactamente un elemento y del conjunto B. Al elemento y se le designa por $f(x)$.

Observaciones

- La función f se denota así:

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

- $f(x)$ se denomina la imagen de x bajo f.
- Denotamos $y = f(x)$ y decimos que x es la variable independiente y y la variable dependiente.

Dominio y rango de una función

Si

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

- El dominio de la función f es el conjunto A y se denota por $\operatorname{dom}(f)$.
- El rango (o imagen) de f, denotado como $\operatorname{ran}(f)$, es el conjunto de todos los valores de $f(x)$, es decir,

$$\operatorname{ran}(f) = \{f(x) : x \in A\}$$

- El codominio de la función f es el conjunto B, usualmente se denota por $\operatorname{codom}(f)$.
- Note que siempre $\operatorname{ran}(f) \subseteq B$, es decir, $\operatorname{ran}(f) \subseteq \operatorname{codom}(f)$.

Ejemplo

Dadas las funciones

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, \qquad h:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}, \qquad g:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}^+.$$
$$x\longmapsto x^2 \qquad\qquad x\longmapsto x^2 \qquad\qquad x\longmapsto x^2$$

- $\mathrm{dom}(f)=\mathbb{R}$, $\mathrm{ran}(f)=\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ y codominio de f es $\mathbb{R}$.
- $\mathrm{dom}(h)=\mathbb{R}^+$, $\mathrm{ran}(h)=\mathbb{R}^+$ y codominio de h es $\mathbb{R}$.
- $\mathrm{dom}(g)=\mathbb{R}^+$, $\mathrm{ran}(g)=\mathbb{R}^+$ y codominio de g es $\mathbb{R}^+$ que es igual a su rango.

Igualdad de Funciones

Dos funciones f y g son iguales si tienen el mismo dominio, el mismo codominio y además

$$f(x) = g(x)$$

para todo x en el dominio de la función.

Ejemplo

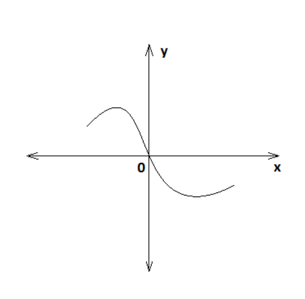
En el ejemplo anterior la función f es diferente de las funciones g y h porque su dominio es diferente al de cada una de ellas. Aunque las funciones g y h tienen igual dominio e igual rango, ellas son diferentes porque sus codominios son diferentes.

Gráfica de una función

Sea f una función con dominio A. La gráfica de f es el conjunto de todos los pares ordenados

$$\{(x, f(x)) : x \in A\}$$

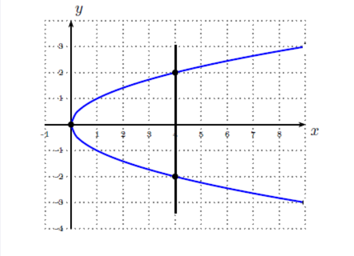
dibujados en el plano xy.



Prueba de la recta vertical

Una curva en el plano xy es la gráfica de una función de x, si y sólo si, ninguna línea vertical se interseca con la curva más de una vez.

La siguiente curva no es la gráfica de una función de x



Como graficar una función

Directrices para graficar una función f

1. Determine el dominio de la función f.
2. Determine el rango de la función f en caso de ser posible, de no ser posible, hágalo una vez esté graficada la función.
3. Halle los interceptos con el eje x, es decir solucione la ecuación $f(x) = 0$ para obtener todos los puntos de la forma $(x, 0)$, si ellos existen.
4. Halle los interceptos con el eje y, es decir calcule $f(0)$ para obtener todos los puntos de la forma $(0, y)$, si ellos existen.
5. Construya una tabla de valores, teniendo en cuenta el dominio y los interceptos con los ejes, tome tantos puntos cuanto sea necesario.
6. Grafique en el plano xy los puntos calculados en la tabla de valores.

Ejemplo

Para graficar la función $f(x) = x^2 - 4$, determinamos los siguientes elementos:

1. $Dom(f) = \mathbb{R}$ porque x puede tomar cualquier valor en $\mathbb{R}$

2. $Ran(f) = [-4, \infty)$.

   Porque al despejar x en términos de y obtenemos $x = \sqrt{y+4}$ lo que muestra que $y \geq -4$.

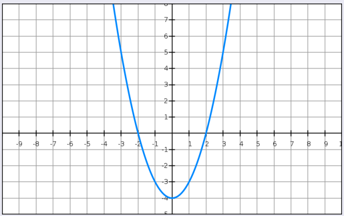
3. Interceptos con el eje x: $(\pm 2, 0)$ Porque $f(x) = x^2 - 4 = 0$ para $x = \pm 2$

4. Intercepto con el eje y: $(-4, 0)$ Porque $f(0) = -4$.

Usaremos la siguiente tabla de valores para la gráfica

$f(-2)$	$f(-1)$	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$
0	-3	-4	-3	0

Gráfica de la función $f(x) = x^2 - 4$



Ejemplo

Para graficar la función $f(x) = \sqrt{x}$, determinamos los siguientes elementos:

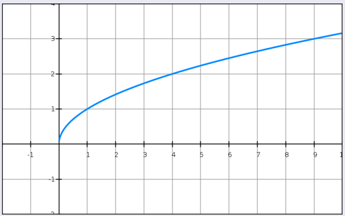
1. $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}$
   $= [0, \infty)$.
2. $Ran(f) = [0, \infty)$.

   Porque que tenemos que $y = \sqrt{x} \geq 0$ y al despejar x en términos de y obtenemos $x = y^2$.
3. Interceptos con los ejes x y y: Dado que $f(0) = 0$ el único intercepto es $(0, 0)$.

Usaremos la siguiente tabla de valores para la gráfica

$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(4)$	$f(9)$
0	1	$\sqrt{2}$	2	3

Gráfica de la función $f(x) = \sqrt{y}$



Funciones Polinomiales

Una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función polinomial, si

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad n \in \mathbb{N}$$

El dominio de una función polinomial es siempre $\mathbb{R}$, por tanto si f es polinomial: $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R}$

Los interceptos con el eje x de una función polinomial son las soluciones de la ecuación:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

es decir, las raíces o ceros del polinomio.

Función Constante

Es una función polinomial de grado cero. Es decir

$$f(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

con $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\mathrm{ran}(f) = \{c\}$

Función Lineal

Es una función polinomial de grado uno. Es decir

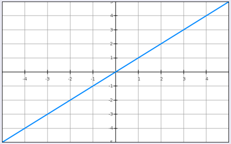
$$f(x) = ax + b, \quad a \neq 0$$

con $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\mathrm{ran}(f) = \mathbb{R}$

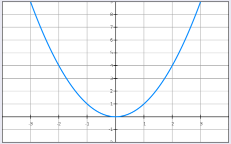
Puede definirse también la función lineal como una función polinomial de grado menor o igual a uno, en cuyo caso la función constante es un caso particular de una función lineal.

Gráficas de algunas funciones polinomiales

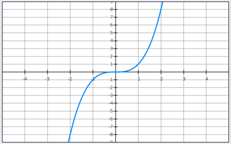
- La función lineal $f(x) = x$ tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $\mathbb{R}$.



- La función cuadrática $f(x) = x^2$ tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $[0, \infty)$.



- La función cúbica $f(x) = x^3$ tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $\mathbb{R}$.



Referencias

Sullivan, M. *Álgebra y Trigonometría*, 7^a Edición. Editorial Pearson Prentice Hall, 2006.

Swokowski, E.W. Cole, J.A. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica* 13^a Edición. Editorial Cengage Learning, 2011

Zill, D. G. Dewar, J. M. *Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica*, 3^a Edición. Editorial McGraw-Hill, 2012.