Módulo 2 - Diapositiva (Quiz 2)
Ecuación de la recta

Universidad de Antioquia

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Temas

- Ecuación de la Recta
- Rectas Paralelas y Perpendiculares
- Fórmulas de Distancia y Punto Medio

Rectas

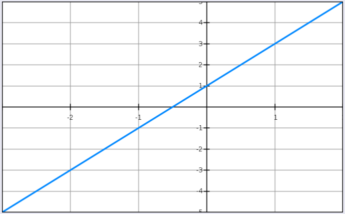
Línea recta

La gráfica de una función lineal

$$f(x) = mx + b, \quad m \neq 0$$

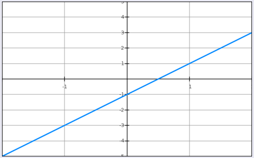
es una línea recta, con pendiente m, intercepto con el eje y igual a $(0, b)$ e intercepto con el eje x igual a $(-b/m, 0)$.

Gráfica de la recta $y = 2x + 1$

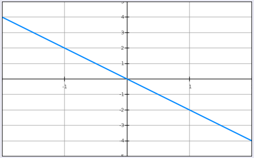


Ejemplos

1. La gráfica de la función lineal $f(x) = 2x - 1$ es una línea recta con pendiente 2, que intercepta el eje y en el punto $(0, -1)$ y al eje x en el punto $(1/2, 0)$.



2. La gráfica de la función lineal $f(x) = -2x$ es una línea recta con pendiente -2, que intercepta el eje y y al eje x en el punto $(0, 0)$.



Pendiente de una recta

La pendiente m de una recta, no vertical, que pasa por los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) es:

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Ejemplo:

La pendiente de la recta que pasa por los puntos $(1, 2)$ y $(-2, 1)$ es:

$$m = \frac{1 - 2}{-2 - 1} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

Ecuaciones de la recta

Ecuación Punto-Pendiente

Una ecuación de una recta que pasa por el punto (x_1, y_1) y tiene pendiente m es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ejemplo

Una ecuación de una recta que pasa por el punto $(1, 2)$ y tiene pendiente $\frac{1}{3}$ es:

$$(y - 2) = \frac{1}{3}(x - 1)$$

Ejercicio resuelto

Escriba la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(1, -1)$ y $(-1, -3)$.

Note que con estos dos puntos es posible hallar la pendiente de dicha recta así:

$$m = \frac{-3 - (-1)}{-1 - 1} = \frac{-2}{-2} = 1$$

Podemos utilizar la ecuación punto-pendiente puesto que sabemos que esta recta tiene pendiente 1 y pasa por el punto $(-1, -3)$ (puede también escogerse el punto $(1, -1)$) y obtenemos

$$(y - (-3)) = 1(x - (-1))$$

es decir,

$$y + 3 = x + 1 \quad \text{ó} \quad y = x - 2$$

Ecuación Pendiente-Intercepto

Una ecuación de una recta que tiene pendiente m y tiene intercepto con el eje y en b es

$$y = mx + b$$

Ejemplo

Una ecuación de una recta que tiene pendiente -2 y tiene intercepto con el eje y en $\frac{1}{2}$ es

$$y = -2x + \frac{1}{2}$$

Forma general para la ecuación de una recta

Decimos que la ecuación de una recta está escrita en forma general o estandar, si tiene la forma:

$$ax + by = c$$

Observación

1. Note que en la ecuación anterior si $a = 0$ y $b \neq 0$, entonces tenemos una recta horizontal $y = \frac{c}{b}$ cuya pendiente es cero e intersección con el eje y es $\frac{c}{b}$.

2. Si en la ecuación anterior $b = 0$ y $a \neq 0$, entonces tenemos una recta vertical $x = \frac{c}{a}$ cuya intersección con el eje x es $\frac{c}{a}$. La pendiente de esta recta no está definida.

Ejemplo

- La recta con ecuación punto-pendiente

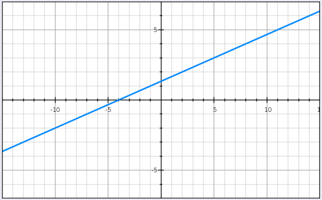
$$(y-2) = \frac{1}{3}(x-2)$$

tiene ecuación general

$$x - 3y = -4.$$

y tiene ecuación pendiente-intercepto

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}.$$



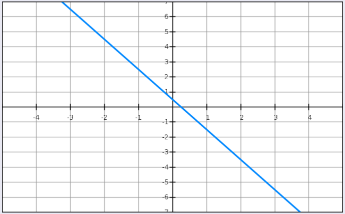
Ejemplo

- La recta con ecuación pendiente-intercepto

$$y = -2x + \frac{1}{2}$$

tiene ecuación general

$$4x + 2y = 1.$$



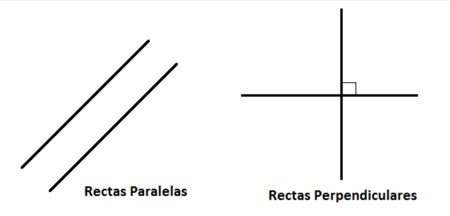
Rectas paralelas y perpendiculares

Rectas Paralelas

Dos rectas no verticales con pendientes m_1 y m_2 son paralelas, si y solamente si, $m_1 = m_2$.

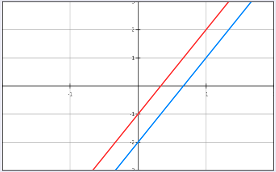
Rectas Perpendiculares

Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares, si y solamente si, $m_1 m_2 = -1$

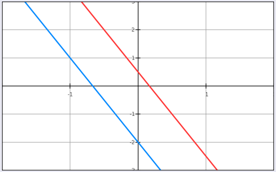


Ejemplos

1. Las rectas con ecuación $y = 3x - 2$ (gráfica azul) y $3x - y = 1$ (gráfica roja) son paralelas porque ambas tienen pendiente 3.

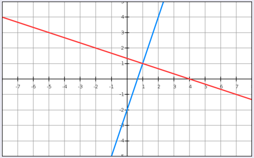


2. Las rectas con ecuación $y = -3x - 2$ (gráfica azul) y $6x + 2y = 1$ (gráfica roja) son paralelas porque ambas tienen pendiente -3.

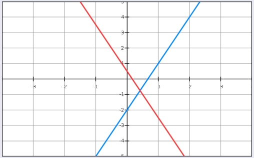


Ejemplos

1. Las rectas $y = 3x - 2$ (azul) y $x + 3y = 4$ (roja) son perpendiculares porque el producto de sus pendientes es $(3)(-\frac{1}{3}) = -1$.



2. Las rectas $y = 3x - 2$ (azul) y $6x + 2y = 1$ (roja) no son paralelas porque $m_1 = 3 \neq -3 = m_2$ y no son perpendiculares porque $(3)(-3) = -9 \neq -1$.



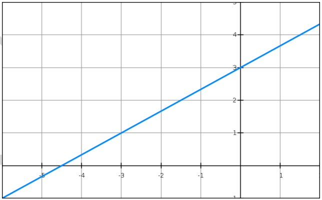
Ejercicio resuelto 1

Hallar una ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(\frac{3}{2}, 4)$ y $Q(-6, -1)$, mostrando explícitamente su pendiente, interceptos y gráfica.

Primero hallamos la pendiente

$$m = \frac{4 - (-1)}{\frac{3}{2} - (-6)} = \frac{5}{\frac{15}{2}} = \frac{2}{3}$$

y luego usando la forma punto-pendiente con el punto Q obtenemos $(y - (-1)) = \frac{2}{3}(x - (-6))$, es decir $y = \frac{2}{3}x + 3$, con interceptos $(0, 3)$ y $(-\frac{9}{2}, 0)$



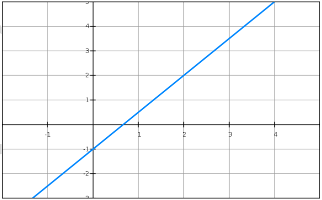
Ejercicio resuelto 2

Hallar una ecuación de la recta que es paralela a la recta $2y - 3x = 14$ y corta el eje y en -1 mostrando explícitamente su pendiente, interceptos y gráfica.

Por ser paralela a la recta $2y - 3x = 14$ tiene pendiente $m = \frac{3}{2}$ y dado que su intercepto con el eje y es $(0, -1)$, es decir $b = -1$, entonces usando la forma pendiente-intercepto obtenemos $y = \frac{3}{2}x + (-1)$, así

$$y = \frac{3}{2}x - 1$$

cuyo intercepto con el eje x es $(\frac{2}{3}, 0)$



Fórmula de distancia entre dos puntos

Distancia entre dos puntos

Dados dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ del plano coordenado, la distancia $d(P, Q)$ entre ellos, está dada por:

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplo

La distancia entre los puntos $P(3, 5)$ y $Q(-5, 7)$ está dada por:

$$d(P, Q) = \sqrt{(-5 - 3)^2 + (7 - 5)^2} = \sqrt{(-8)^2 + (2)^2}$$

$$d(P, Q) = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

Fórmula de punto medio

Punto medio de un segmento

Dados dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, las coordenadas del punto medio M, del segmento que une P y Q, son:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Ejemplo

El punto medio del segmento $\overline{PQ}$ con $P(3, -5)$ y $Q(5, 7)$ tiene coordenadas

$$M = \left(\frac{3 + 5}{2}, \frac{-5 + 7}{2}\right) = (4, 1)$$

Referencias

Sullivan, M. *Álgebra y Trigonometría*, 7^a Edición. Editorial Pearson Prentice Hall, 2006.

Swokowski, E.W. Cole, J.A. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica* 13^a Edición. Editorial Cengage Learning, 2011

Zill, D. G. Dewar, J. M. *Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica*, 3^a Edición. Editorial McGraw-Hill, 2012.