Módulo 3 - Diapositiva (Quiz 3)
Funciones por partes y sus gráficas

Universidad de Antioquia

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

UdeA

Temas

- Funciones por partes
- Gráficas de las funciones por partes

U de A

Función por partes

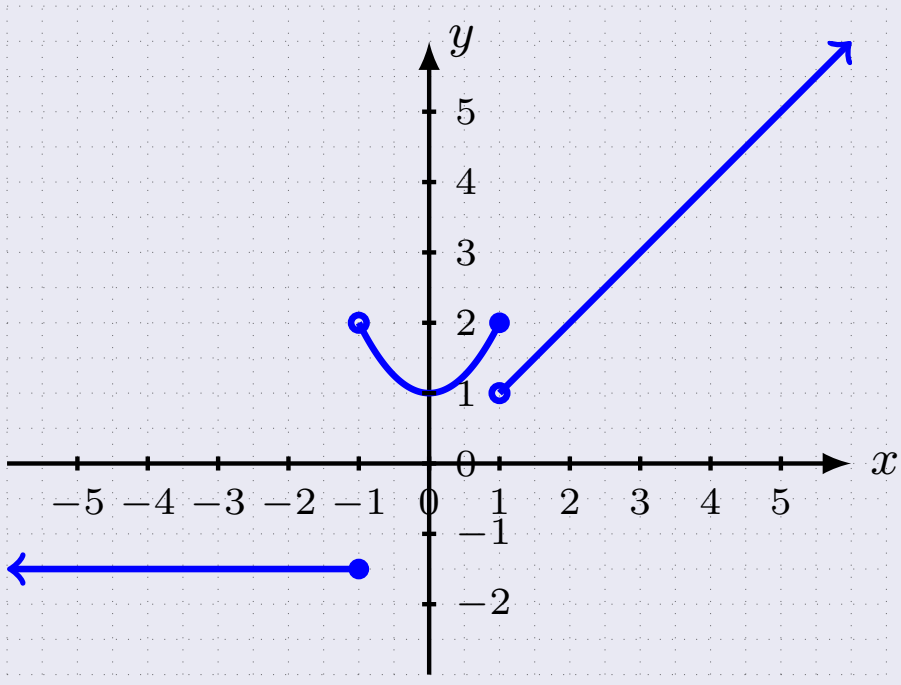
Una función por partes o a tramos, es una función f, en la cual su dominio se puede dividir en diferentes partes y en cada una de esas partes la función está definida con una fórmula o expresión diferente.

Ejemplo

La siguiente función, cuyo dominio $\mathbb{R}$ fue dividido en tres subconjuntos: $\mathbb{R} = (-\infty, -1] \cup (-1, 1] \cup (1, \infty)$, está definida por tres ecuaciones diferentes (una para cada intervalo) así:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 + 1, & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ x, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La gráfica de la función anterior se ilustra a continuación:

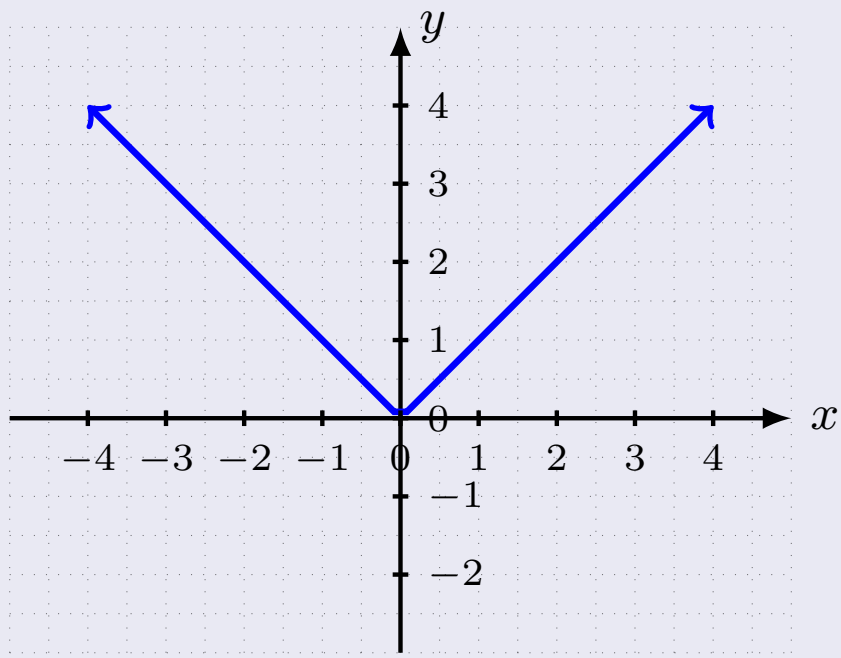


De la gráfica se puede concluir que $Ran(f) = \{-1\} \cup [1, \infty)$, y se puede ver que la función no tiene interceptos con el eje x y tiene por intercepto con el eje y, el punto $(0, 1)$.

Función Valor Absoluto

Un ejemplo importante de función por partes, que ya había sido estudiado en el módulo anterior, es la función valor absoluto:

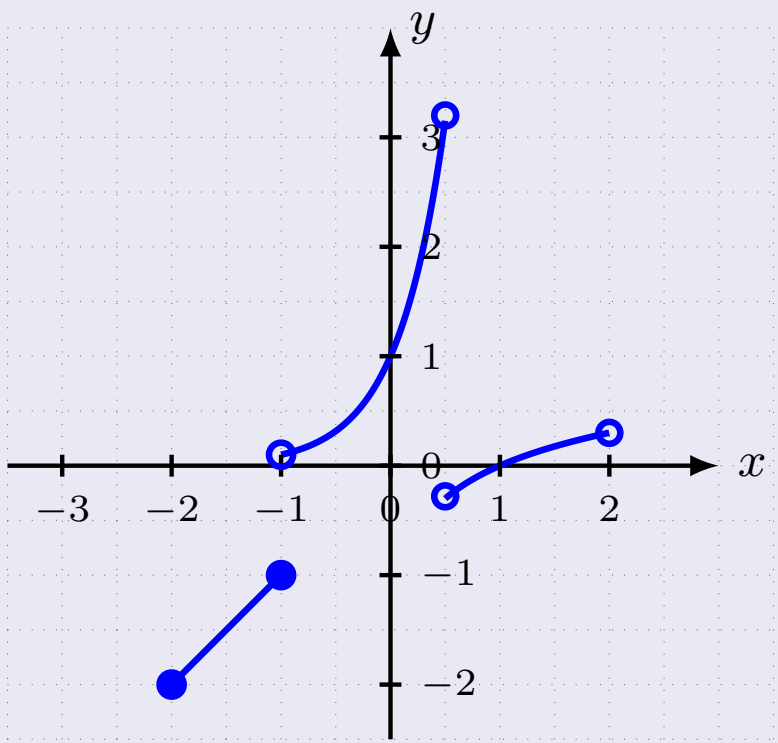
$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \text{dom}(f) = \mathbb{R} \\ \text{ran}(f) = [0, \infty) \end{array}$$



El dominio de una función por partes, no necesariamente son todos los reales, como se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } -2 \leq x \leq -1 \\ 10^x, & \text{si } -1 < x < \frac{1}{2} \\ log(x), & \text{si } \frac{1}{2} < x < 2 \end{cases} \quad , \quad Dom(f) = [-2, 1/2\,) \cup (\,1/2, 2)$$



Ejercicios resueltos

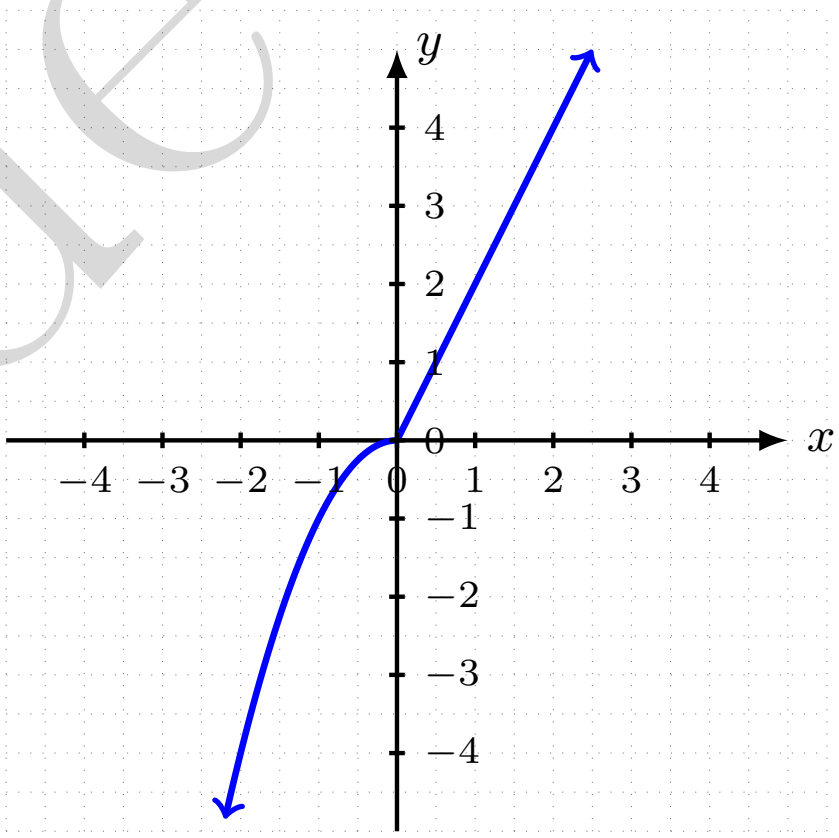
Ejercicio 1

Grafique la siguiente función e indique su dominio y su rango.

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Dado que x puede tomar valores mayores o iguales que cero (en el primer tramo) y valores menores que cero (en el segundo tramo), entonces el dominio de la función son todos los reales.
De su gráfica podemos ver que su imagen son todos los reales, así:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = \text{Ran}(f)$$



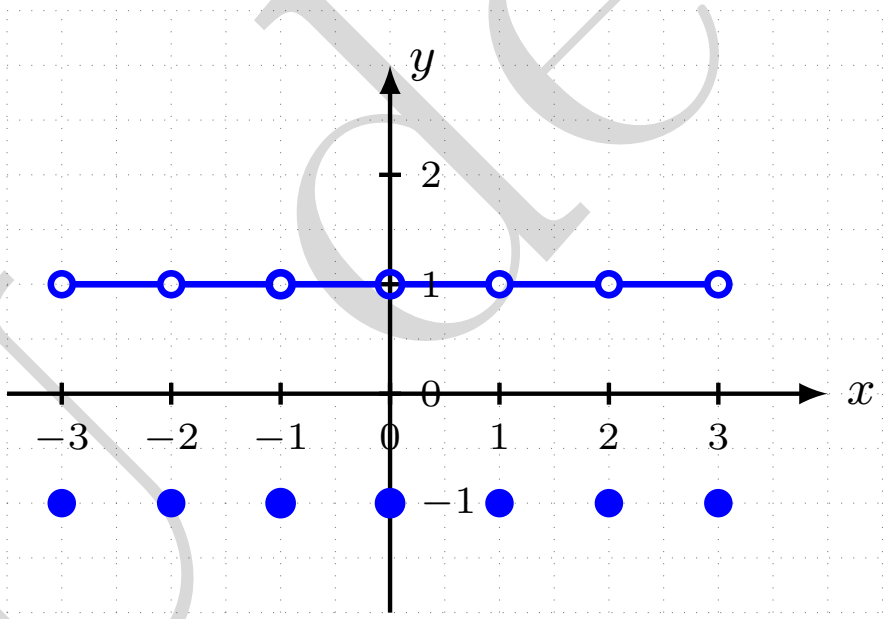
UdeA

Ejercicio 2

Considere la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \text{ es un entero} \\ 1 & \text{si } x \text{ no es un entero} \end{cases}$$

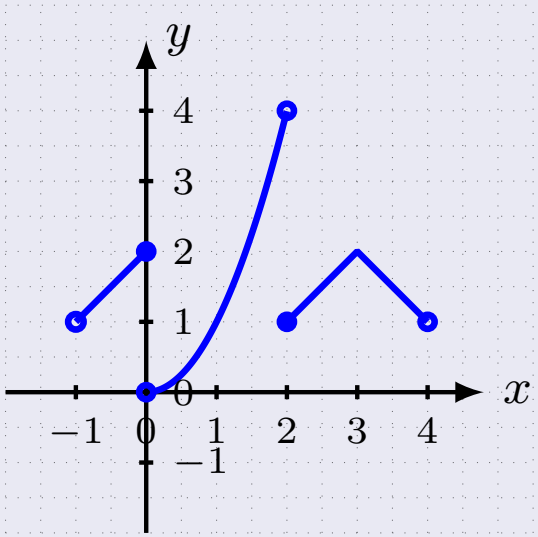
Grafique la función e indique su rango.



De la gráfica de la función es fácil ver que $\text{Ran}(f) = \{1, -1\}$

Ejercicio 3

Determine la función por partes, que mejor se aproxima, a la mostrada en la siguiente gráfica:



Note que tenemos una función definida en tres tramos. En el primer tramo, $x \in (-1, 0]$, tenemos la función lineal $y = x + 2$ (utilizando la ecuación de la recta, conocidos dos puntos). En el segundo tramo, $x \in (0, 2)$, tenemos la función cuadrática $y = x^2$. Finalmente en el tercer tramo, $x \in [2, 4)$, tenemos la función $y = -|x - 3| + 2$ (utilizando traslaciones y reflexiones). Así la función pedida es:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } 0 < x < 2 \\ -|x - 3| + 2 & \text{si } 2 \leq x < 4 \end{cases}$$

Es posible realizar operaciones con funciones por tramos, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Sean las funciones

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{si } x\leq -1 \\ x^2+1, & \text{si } -1<x<1 \\ e^x, & \text{si } x\geq 1 \end{cases}, \quad \text{y} \quad g(x)=\begin{cases} 2x-1, & \text{si } x\leq 0 \\ x, & \text{si } x>0 \end{cases},$$

ambas con dominio $\mathbb{R}$. Se puede realizar la suma y obtener la función $f+g$, cuyo dominio es $\mathbb{R}$, así:

$$(f+g)(x)=\begin{cases} 3x-1, & \text{si } x\leq -1 \\ x^2+2x, & \text{si } -1<x\leq 0 \\ x^2+x+1, & \text{si } 0<x<1 \\ e^x+x, & \text{si } x\geq 1 \end{cases},$$

Referencias

Sullivan, M. *Álgebra y Trigonometría*, 7^a Edición. Editorial Pearson Prentice Hall, 2006.

Swokowski, E.W. Cole, J.A. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica* 13^a Edición. Editorial Cengage Learning, 2011

Zill, D. G. Dewar, J. M. *Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica*, 3^a Edición. Editorial McGraw-Hill, 2012.