Módulo 4-Diapositiva (Quiz 4)
Fracciones Parciales

Universidad de Antioquia

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Temas

- Expresiones Racionales
- Descomposición en Fracciones Parciales

Expresión Racional

Expresión Racional

Una expresión racional es una expresión de la forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios y $Q(x) \neq 0$.

Expresión Racional Propia

Una expresión racional es una **expresión racional propia** (o fracción propia) si el grado del polinomio del numerador es menor que el grado del polinomio del denominador.

Consideraremos expresiones racionales simplificadas, es decir, en las cuales los polinomios del numerador y del denominador no tengan factores en común, (caso contrário podemos simplificar la expresión).

Ejemplo

La expresión racional
$$\frac{2x-3}{3x^2+7x-1}$$
es una expresión racional propia, pero las siguientes expresiones no lo son
$$\frac{2x^2+3}{x^2+7x-1} \quad \text{y} \quad \frac{2x^3-3}{x^2+7x-1}$$
Reescribimos las dos últimas expresiones utilizando el algoritmo de la división
$$2x^2+3 = 2(x^2+7x-1)+(-14x+5)$$
y
$$2x^3-3 = (2x-14)(x^2+7x-1)+(100x-17)$$
y obtenemos las expresiones (que tienen al final una fracción propia)
$$\frac{2x^2+3}{x^2+7x-1} = 2+\frac{-14x+5}{x^2+7x-1}$$
y
$$\frac{2x^3-3}{x^2+7x-1} = 2x-14+\frac{100x-17}{x^2+7x-1}$$

Fracciones Parciales

Descomposición en Fracciones Parciales

Podemos escribir cualquier expresión racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ como suma de expresiones racionales cuyos denominadores contienen potencias de polinomios de grado no mayor a dos.

Observación

Para hallar la descomposición en fracciones parciales es necesario que $P(x)$ tenga grado menor que $Q(x)$, es decir, aplicamos la descomposición en fracciones parciales a expresiones racionales propias.

Si queremos encontrar la descomposición en fracciones parciales de una expresión racional que no es propia, podemos utilizar el algoritmo de la división para reescribir la expresión como la suma de un polinomio mas una expresión racional propia y aplicar la descomposición en fracciones parciales a esta nueva expresión propia (ver ejemplo al final).

Descomposición en Fracciones Parciales

Directrices para hallar la descomposición en fracciones parciales de $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$

- Verifique que el grado de $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$. Si este no es el caso, utilice el algoritmo de la división para obtener la forma apropiada.
- Factorice el denominador $Q(x)$ como un producto de factores lineales de la forma $px+q$ o factores lineales cuadráticos irreducibles ax^2+bx+c, y agrupe factores repetidos para que $Q(x)$ sea un producto de factores diferentes de la forma $(px+q)^m$ o $(ax^2+bx+c)^n$ para enteros positivo m o n.
- Aplique las siguientes reglas a los factores hallados:

Regla A: Para cada factor de la forma $(px+q)^m$, la descomposición en fracciones parciales contiene una suma de m fracciones de la forma:

$$\frac{A_1}{px+q}+\frac{A_2}{(px+q)^2}+\cdots+\frac{A_m}{(px+q)^m}$$

donde cada $A_k \in \mathbb{R}$

Regla B: Para cada factor de la forma $(ax^2 + bx + c)^n$ con $ax^2 + bx + c$ irreducible, la descomposición en fracciones parciales contiene una suma de n fracciones de la forma:

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2x + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

donde cada A_k y B_k es un número real.

- Encontrar los valores A_K y B_k indicados en la directriz anterior.

Observación

1. Si en la factorización aparecen dos o mas factores lineales repetidos, es decir, $(px + q)^m$ y $(rx + s)^n$, entonces a cada uno de ellos le aplicamos la regla A.
2. Si en la factorización aparecen dos o mas factores cuadráticos irreducibles repetidos, es decir, $(ax^2 + bx + c)^m$ y $(dx^2 + ex + f)^n$, entonces a cada uno de ellos le aplicamos la regla B.
3. Si en la factorización aparecen factores lineales y factores cuadráticos irreducibles repetidos, es decir, $(ax + b)^m$ y $(cx^2 + dx + e)^n$, entonces al factor lineal le aplicamos la regla A y al cuadrático la regla B.

Ejemplos de descomposición en fracciones parciales

$Q(x)$ es un producto de factores lineales distintos

Para descomponer la siguiente fracción en fracciones parciales

$$\frac{x+14}{x^2-2x-8}$$

Notemos que el polinomio en el denominador de la fracción se puede factorizar como producto de factores lineales no repetidos, así: $x^2-2x-8=(x-4)(x+2)$, por tanto podemos aplicar la Regla A, para obtener que:

$$\frac{x+14}{x^2-2x-8}=\frac{A_1}{x-4}+\frac{A_2}{x+2}=\frac{A_1(x+2)+A_2(x-4)}{(x-4)(x+2)}$$

es decir,

$$\frac{x+14}{x^2-2x-8}=\frac{(A_1+A_2)x+(2A_1-4A_2)}{(x-4)(x+2)}$$

La igualdad anterior nos permite plantear el siguiente sistema de ecuaciones, basados en la propiedad de la igualdad de polinomios, para los polinomios en los numeradores de las fracciones:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 1 \\ 2A_1 - 4A_2 &= 14 \end{aligned}$$

y resoviendo este sistema llegamos a las soluciones $A_1 = 3$ y $A_2 = -2$, es decir que la descomposición en fracciones parciales es:

$$\frac{x+14}{x^2-2x-8} = \frac{3}{x-4} - \frac{2}{x+2}$$

Ejercicio

Escriba la forma de la descomposición en fracciones parciales sin hallar el valor de las constantes

$$\frac{x-3}{(x+1)(x-2)(x+3)(x-6)}$$

$Q(x)$ es un producto de factores lineales, algunos de ellos repetidos

Para la expresión racional

$$\frac{x-1}{x^3+2x^2+x}$$

tenemos que $x^3+2x^2+x = x(x+1)^2$, es decir que el denominador se puede factorizar con el producto de factores lineales, uno de los cuales está repetido, luego al aplicar la regla A obtenemos:

$$\frac{x-1}{x^3+2x^2+x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{A_1(x+1)^2 + A_2x(x+1) + A_3x}{x(x+1)^2}$$

$$= \frac{(A_1+A_2)x^2 + (2A_1+A_3)x + A_1}{x(x+1)^2}$$

Que nos lleva a plantear el sistema

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 0 \\ 2A_1 + A_3 &= 1 \\ A_1 &= -1 \end{aligned}$$

cuyas soluciones son $A_1 = -1$, $A_2 = 1$ y $A_3 = 2$, es decir que la descomposición en fracciones parciales es:

$$\frac{x-1}{x^3+2x^2+x} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}$$

Ejercicio

Escriba la forma de la descomposición en fracciones parciales sin hallar el valor de las constantes

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)^3}$$

$Q(x)$ tiene un factor cuadrático irreducible que no se repite

Para descomponer la fracción

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}$$

utilizamos la factorización $x^3 + 4x = x(x^2 + 1)$, que nos muestra un factor lineal no repetido y un factor cuadrático no repetido, por tanto usamos la regla A para el factor lineal y la regla B para el factor cuadrático así:

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2 + A_3 x}{x^2 + 4}$$

$$= \frac{A_1(x^2 + 4) + (A_2 + A_3 x)x}{x(x^2 + 4)}$$

y planteamos el sistema

$$A_1 + A_3 = 2, \; A_2 = -1 \;\; \text{y} \;\; 4A_1 = 4$$

cuyas soluciones son $A_1 = A_3 = 1 \;\; \text{y} \;\; A_2 = -1$, así:

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{1}{x} + \frac{x - 1}{x^2 + 4}$$

$Q(x)$ tiene dos factores cuadráticos irreducibles, uno de los cuales se repite

Si tenemos la fracción:

$$\frac{x}{(x^2+1)^2(2x^2+1)}$$

en la cual hay dos factores cuadráticos, uno de los cuales está repetido, utilizamos la regla B para ambos factores así:

$$\frac{x}{(x^2+1)^2(2x^2+1)} = \frac{A_1 + A_2x}{x^2+1} + \frac{A_3 + A_4x}{(x^2+1)^2} + \frac{A_5 + A_6x}{2x^2+1} =$$

$$\frac{(A_1 + A_2x)(x^2+1)(2x^2+1) + (A_3 + A_4x)(2x^2+1) + (A_5 + A_6x)(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2(2x^2+1)}$$

que expandiendo el numerador, nos queda asociado, para cada potencia de x así:

$$(2A_2 + A_6)x^5 + (2A_1 + A_5)x^4 + (3A_2 + 2A_4 + 2A_6)x^3 +$$

$$(3A_1 + 2A_3 + 2A_5)x^2 + (A_2 + A_4 + A_6)x + (A_1 + A_3 + A_5)$$

y planteamos el sistema:

$$\begin{aligned} 2A_2 + A_6 &= 0 \\ 2A_1 + A_5 &= 0 \\ 3A_2 + 2A_4 + 2A_6 &= 0 \\ 3A_1 + 2A_3 + 2A_5 &= 0 \\ A_2 + A_4 + A_6 &= 1 \\ A_1 + A_3 + A_5 &= 0 \end{aligned}$$

cuyas soluciones son

$$A_1 = A_3 = A_5 = 0,\ A_2 = -2,\ A_4 = -1 \quad \text{y} \quad A_6 = 4$$

así:

$$\frac{x}{(x^2+1)^2(2x^2+1)} = -\frac{2x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{4x}{2x^2+1}$$

Ejemplo: Fracción parcial de una fracción que no es propia

Para encontrar la descomposición en fracciones parciales de la fracción, que no es propia,

$$\frac{2x^4 + 4x^3 - 2x^2 + x + 7}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$$

reescribimos la fracción así:

$$2x^4 + 4x^3 - 2x^2 + x + 7 = 2x(x^3 + 2x^2 - x - 2) + (5x + 7)$$

es decir

$$\frac{2x^4 + 4x^3 - 2x^2 + x + 7}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = 2x + \frac{5x + 7}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$$

y realizamos la descomposición para la fracción propia

$$\frac{5x + 7}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \frac{5x + 7}{(x+1)(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$$

Solucionando el sistema:

$$\begin{aligned} A + B + C &= 0 \\ A + 3B &= 5 \\ -2A + 2B - C &= 7 \end{aligned}$$

obtenemos que $A = C = -1$ y $B = 2$, luego

$$\frac{5x+7}{x^3+2x^2-x-2} = -\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

y realizamos la descomposión en fracciones parciales de la fracción original así:

$$\frac{2x^4+4x^3-2x^2+x+7}{x^3+2x^2-x-2} = 2x - \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

Ejercicio

Escriba la forma de la descomposición en fracciones parciales sin hallar el valor de las constantes, de las siguientes dos fracciones:

1. $\dfrac{x^2+2}{(x-1)^2(x^2+1)(x^2+x+1)}$

2. $\dfrac{x^5-3x^2+12x-1}{x^3(x^2+x+1)(x^2+2)^3}$

Referencias

Sullivan, M. *Álgebra y Trigonometría*, 7^a Edición. Editorial Pearson Prentice Hall, 2006.

Swokowski, E.W. Cole, J.A. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica* 13^a Edición. Editorial Cengage Learning, 2011

Zill, D. G. Dewar, J. M. *Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica*, 3^a Edición. Editorial McGraw-Hill, 2012.