

I. Ejercicios:

- A. 1. Realice las siguientes operaciones entre números complejos, exprese los resultados en la forma estándar $a + bi$ y gráfiquelo en el plano complejo. Para cada uno de los resultados realice el producto de él con su conjugado.

a) $\frac{(5 + i) - (-1 + 7i)}{(2 - 3i) + (6 + 5i)}$

d) $(i^3 + 2i^{13})^4$

b) $\frac{(1 - 2i)^3}{5i^6}$

e) $[(5i - 3)(2i + 1)]^{-2}$

c) $\left[\frac{4 + \sqrt{-81}}{5 - \sqrt{-100}} \right] \cdot \left[\frac{\sqrt{-16} \sqrt{-25}}{\sqrt{-9}} \right]$

g) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)^{20}$

2. Determine si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas, justificando en cada caso.

1) $|(6 + 3i) + (4 + 2i)| = |6 + 3i| + |4 + 2i|$

3) $|3 - 2i| < |3 + 2i|$

2) $|3 - 2i| - |3 + 2i| = 4i$

4) $|(3 - 2i)(3 + 2i)| = |3 - 2i||3 + 2i|$

3. Demuestre las siguientes propiedades para el conjugado.

a) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

b) $\overline{z} = z$ si, y sólo si z es real.

4. Determine los valores de x e y en \mathbb{R} que hacen verdaderas las siguientes igualdades.

a) $(5 - 2i) - 7 = x - (3 + yi)$

b) $-6 + (3x + y)i = 3x + 7yi$

- B. 1. Resuelva las siguientes ecuaciones

a) $\frac{1}{2x - 1} = \frac{4}{8x - 4}$

c) $\frac{3}{2x + 3} + \frac{5}{2x - 3} = \frac{4x + 6}{4x^2 - 9}$

b) $\sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{8}x$

d) $\sqrt{10 + 3\sqrt{t}} = \sqrt{t}$

e) $3x^{\frac{2}{3}} + 4x^{\frac{1}{3}} - 4 = 0$

2. Mediante el análisis del discriminante de las siguientes ecuaciones, determine el tipo (reales y/o complejas) y cantidad de soluciones de cada una de ellas.

a) $2x^2 - 6x + 7 = 0$

c) $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$

b) $9x^2 - 30x + 25 = 0$

d) $5x^2 + 3 = 0$

3. a) Plantee una ecuación lineal que permita resolver el siguiente problema, conocido como la edad de Diofanto y muestre explícitamente esta: *Su infancia ocupó la sexta parte de su vida, después transcurrió una doceava parte de su vida hasta que su mejilla se cubrió de vello. A partir de ahí pasó la séptima parte de su vida hasta contraer matrimonio. Pasaron cinco años y le hizo dichoso el nacimiento de su primogénito, su hijo murió al alcanzar la mitad de los años que su padre llegó a vivir, tras cuatro años de profunda pena por la muerte de su hijo, Diofanto murió.*
- b) Una barra de chocolate de forma rectangular mide 10 centímetros de largo, 6 centímetros de ancho y 3 centímetros de grueso. Se desea reducir el volúmen de la barra de chocolate en un 10% reduciendo el ancho y el largo el mismo número de centímetros pero conservando el grueso de ella. Plantee una ecuación cuadrática que describa la situación y resuelva esta para determinar la dimensiones de la nueva barra de chocolate.

II. Ejercicios complementarios.

- A. 1. Realice las siguientes operaciones entre números complejos, exprese los resultados en la forma estándar $a + bi$ y gráfiquelo en el plano complejo. Para cada uno de los resultados realice el producto de él con su conjugado.

a) $\frac{(2 - i) + (3 - \sqrt{-3})}{(2 + 3i)(2 - i)}$ e) $\left(\frac{3 + 7i}{-i}\right)^{-1}$

b) $\frac{i^7}{(1 + i)^{-4}}$ f) $\left(\frac{1 - 2i}{3 + 4i}\right)^{-4}$

c) $\overline{\left[\frac{1}{(i^3 - 2i^{13})^4}\right]}$ g) $\left(\frac{1}{1 - i}\right)^{10}$

d) $\frac{(2 + \sqrt{-4}) - (3 + \sqrt{-9})}{(-2 - \sqrt{-16}) + (7 + \sqrt{-25}i)}$

2. Determine si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas, justificando en cada caso.

1) $|(3 - 2i) + (3 + 2i)| = |3 - 2i| + |3 + 2i|$ 3) $|3 - 2i| > |2 - 3i|$

2) $|3 - 2i| - |3 + 2i| = |4i|$ 4) $\left|\frac{3 - 2i}{2 - 3i}\right| = \frac{|3 - 2i|}{|2 - 3i|}$

3. Demuestre las siguientes propiedades para el conjugado.

a) $\overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w}$ b) $Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

4. Determine los valores de x e y en \mathbb{R} que hacen verdaderas las siguientes igualdades.

a) $-7i^2 + 2x + yi = (4 + 2i) - 7x$ b) $\sqrt{-4}x + (2y + i) = -4 + (5y + 1)i$

- B. 1. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $4 - \frac{5}{3x - 7} = 4$ c) $x^4 - 6x^2 + 7 = 0$ e) $\sqrt{3x + 7} + \sqrt{x + 2} = 1$

b) $6 - \frac{5}{x} = 4 + \frac{3}{x}$ d) $\frac{4}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} = \frac{12}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}$ f) $x + 2\sqrt{x} - 3 = 0$

2. Mediante el análisis del discriminante de las siguientes ecuaciones, determine el tipo (reales y/o complejas) y cantidad de soluciones de cada una de ellas.

a) $3x^2 + 2x + 5 = 0$

c) $3x^2 + 5x - 8 = 0$

b) $x^4 - 2x^2 + 1$

d) $7x^2 + 3x = 0$

3. Plantee las ecuaciones necesarias para resolver los siguientes problemas:

a) Juan tiene en su curso de matemáticas dos notas parciales de 36 y 43. Si el examen final constituye el 50 % de la nota del curso, determine la nota que debe sacar Juan en este examen final para obtener como nota del curso un 40.

b) Se construye una ventana en forma de rectángulo rematada en la parte superior con un semicírculo. Si el ancho de la ventana debe medir 3 pies, ¿cuál debe ser la altura h , si sólo se tiene presupuesto para comprar 24 pies cuadrados de vidrio?

c) Un alambre de 120 centímetros de longitud se parte en dos para formar dos cuadrados. Si el área encerrada por el primer cuadrado formado es cuatro veces el área encerrada por el otro cuadrado formado, encuentre la longitud de cada uno de los dos trozos de alambre.

III. Autoevaluación del taller: Resuelva (tiempo sugerido para su solución: 40 minutos).

1. Un vaso cónico (sin tapa) de papel tiene una altura de 3 cm. Si se sabe que el área superficial de dicho cono es $6\pi \text{ cm}^2$, calcule el radio del cono. (Ayuda: el área de la superficie de un cono (sin tapa) de altura h y radio r es: $\pi r\sqrt{r^2 + h^2}$).

2. Escriba el resultado del siguiente producto en la forma estandar $a + bi$:

$$\left[\frac{2 - \sqrt{-16}}{1 + i^3} \right] \cdot \overline{\left[\frac{1}{1 - i} \right]}$$

3. Determine los valores de x e y en \mathbb{R} para los cuales:

$$2x + \sqrt{-9} = i^5 [y + (3x - 2)\sqrt{-4}].$$

4. Demuestre que $\overline{z^2} = (\bar{z})^2$